8.4. Määrätyn integraalin sovelluksia

8.4.1. Kertymäfunktio

Jos jatkuva funktio f ilmoittaa jonkin suureen kasvunopeuden ja $x > x_0$, niin määrätty integraali $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ kertoo, kuinka paljon kyseinen suure kasvaa (tai vähenee) siirryttäessä kohdasta x_0 kohtaan x. Tästä syystä yhtälöllä

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

määriteltyä funktiota kutsutaan usein funktion f *kertymäfunktioksi.* Esimerkiksi jos $v(t)$ ilmoittaa kappaleen nopeuden ajan t funktiona, niin kertymäfunktio

$$s(x) = \int_{t_0}^{x} v(t)\,dt$$

ilmoittaa kappaleen ajanhetken t_0 jälkeen kulkeman matkan. Tai jos $q(t)$ on ajan t suhteen vaihteleva yrityksen tuotantonopeus, niin kertymäfunktio

$$Q(x) = \int_{t_0}^{x} q(t)\,dt$$

ilmoittaa yrityksessä aikavälillä $[t_0, x]$ tuotetun tavaramäärän.

Esimerkki. Kaupunginosan vesisäiliööön pumpataan vettä tasaisella nopeudella 120 $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$. Eräänä lauantaina säiliössä on 2000 m^3 vettä klo 14:00. Kun tästä hetkestä on kulunut t tuntia ja $t \leq 7$, niin senhetkinen vedenkulutus $V(t)$ noudattaa yhtälöä

$$V(t) = -6t^2 + 60t + 140\ (\tfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}})\,.$$

Kuinka paljon säiliössä on vettä illalla klo 21:00 ?

Ratkaisu. Säiliön vesimäärän muutosnopeus on tulevan veden ja kulutetun veden virtausnopeuksien erotus

$$120 - (-6t^2 + 60t + 140) = 6t^2 - 60t - 20\ (\tfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}})\,.$$

Aikavälin 14:00 – 21:00 kesto on 7 tuntia. Tänä aikana säiliön vesimäärä muuttuu

$$\begin{aligned}\int_0^7 \big(6t^2 - 60t - 20\big)\,dt &= \Big/_{\!0}^{7} \big(2t^3 - 30t^2 - 20t\big) \\ &= \big(2 \cdot 7^3 - 30 \cdot 7^2 - 20 \cdot 7\big) - 0 \\ &= -924\end{aligned}$$

kuutiometriä, ts. vesimäärä vähenee 924 m^3. Siis klo 21:00 säiliössä on vettä

$$(2000 - 924)\ \mathrm{m}^3 = \ \mathbf{1076\ m^3}.$$

8.4.2. Kahden käyrän rajoittaman alueen pinta-ala

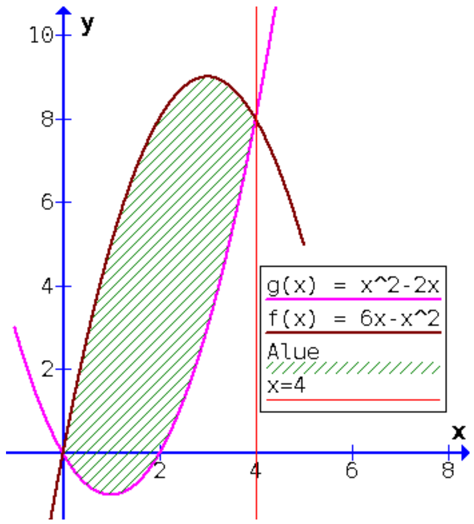
Jos f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja tällä välillä on voimassa $f(x) \geq g(x)$, niin funktioiden kuvaajien sekä suorien $x = a$ ja $x = b$ rajoittaman alueen pinta-ala on

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx\,.$$

Esimerkki. Määrää paraabelien $y = x^2 - 2x$ ja $y = 6x - x^2$ rajoittaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu. Määrätään ensin käyrien leikkauspisteet.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x = 6x - x^2 &\Leftrightarrow 2x^2 - 8x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(x-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } x = 4 \end{aligned}$$



Kuvan perusteella käyrä $y = 6x - x^2$ on käyrän $y = x^2 - 2x$ yläpuolella, kun $x \in [0, 4]$. Kysytty pinta-ala on siten

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 \left[(6x - x^2) - (x^2 - 2x)\right] dx = \int_0^4 \left(8x - 2x^2\right) dx \\ &= \Big/_0^4 \left(4x^2 - \tfrac{2}{3}x^3\right) = 4 \cdot 16 - \tfrac{2}{3} \cdot 64 \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot 64 = 21\tfrac{1}{3}\,. \end{aligned}$$