Reaalifunktion jatkuvuus

Funktio, jonka määrittelyjoukko ja maalijoukko ovat reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ osajoukkoja, on *reaalifunktio*. Reaalifunktio $f(x)$ on *jatkuva* kohdassa $x = x_0$ (eli f on *jatkuva pisteessä* x_0), jos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Määritelmä sisältää kolme ehtoa:

- funktion raja-arvo on olemassa kohdasssa $x = x_0$;
- funktio on määritelty kohdassa $x = x_0$;
- arvo ja raja-arvo ovat sama luku.

Jos jokin näistä ehdoista ei toteudu, niin x_0 on funktion $f(x)$ *epäjatkuvuuskohta* (ja funktio $f(x)$ on *epäjatkuva* tässä kohdassa). Reaalifunktio $f(x)$ on *oikealta jatkuva* kohdassa $x = x_0$, jos $f(x_0)$ ja oikeanpuoleinen raja-arvo $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ ovat sama luku. Vastaavasti määritellään vasemmalta jatkuvuus. Reaalifunktio on on *jatkuva avoimella välillä* $]a, b[$, jos se on jatkuva välin jokaisessa pisteessä. Funktio on *jatkuva suljetulla välillä* $[a, b]$, jos sen jatkuva avoimella välillä $]a, b[$ ja sen lisäksi oikealta jatkuva päätepisteessä a ja vasemmalta jatkuva päätepisteessä b.

Reaalifunktio on *jatkuva funktio*, jos se on jatkuva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä. Raja-arvon laskusääntöjen nojalla samalla välillä määriteltyjen jatkuvien funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ summa $s(x) = f(x) + g(x)$, erotus $d(x) = f(x) - g(x)$, tulo $t(x) = f(x) \cdot g(x)$ ja osamäärä $j(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ovat jatkuvia funktioita. Lisäksi yhdistetty funktio $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ on jatkuva funktio, kun f ja g ovat jatkuvia funktioita. Kaikki alkeisfunktiot (polynomit, rationaalifunktiot, potenssifunktiot $x \mapsto x^a$, eksponenttifunktiot $x \mapsto a^x$, logaritmifunktiot $x \mapsto \log_a x$ ja trigonometriset funktiot) ovat määrittelyjoukossaan jatkuvia.

Välillä määritellyn jatkuvan funktion kuvaaja on yhtenäinen, katkeamaton käyrä.

Jatkuvilla funktioilla on seuraava tärkeä ominaisuus: jos f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, niin sen tällä välillä saamat arvot muodostavat jonkin suljetun välin $[c, d]$. Tällöin erityisesti jokainen arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ väliin jäävä luku on jokin arvoista $f(x)$, $a \leq x \leq b$, joten saadaan seuraava tulos:

Bolzanon lause. Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$. Jos luvut $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin funktiolla f on nollakohta välillä $]a, b[$ (eli on olemassa ainakin yksi luku c siten, että $a < c < b$ ja $f(c) = 0$).

Tiivistäen: *välillä määritelty jatkuva funktio ei voi muuttaa merkkiään saamatta arvoa nolla.*