Matriisiyhtälön ratkaiseminen käänteismatriisin avulla

Kun a ja b ovat lukuja ja $a \neq 0$, niin yhtälöllä

$$ax = b$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $x = \frac{b}{a}$. Ratkaisu saadaan kertomalla yhtälön molemmat puolet luvun a käänteisluvulla a^{-1}. Vastaavasti matriisiyhtälö $AX = B$ tai $XA = B$ voidaan ratkaista kertomalla se puolittain matriisin A käänteismatriisilla (muista, että $A^{-1}A = AA^{-1} = I$).

5.6.5 Lause. Jos A on kääntyvä neliömatriisi ja B on matriisi, jossa on yhtä monta riviä kuin matriisissa A, niin matriisiyhtälöllä

$$AX = B$$

on yksikäsitteinen ratkaisu

$$X = A^{-1}B\,.$$

Todistus. Ensinnäkin $X = A^{-1}B$ on määritelty (tulo pystytään muodostamaan) ja tämä X toteuttaa tarkasteltavan matriisiyhtälön: jos $X = A^{-1}B$, niin

$$AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B\,.$$

Toisaalta $X = A^{-1}B$ on yhtälön *ainoa* ratkaisu, sillä

$$\begin{aligned} AX = B \;&\Rightarrow\; A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\ &\Rightarrow\; (A^{-1}A)X = A^{-1}B \\ &\Rightarrow\; IX = A^{-1}B \\ &\Rightarrow\; X = A^{-1}B\,. \end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisu on siis yksikäsitteinen.

Vastaavasti matriisiyhtälön

$$XA = B$$

ratkaisu on yksikäsitteisesti

$$X = BA^{-1}$$

mikäli A on kääntyvä ja tulo AB määritelty. Ratkaisuun päästään tällä kertaa kertomalla aluksi yhtälön molemmat puolet käänteismatriisilla A^{-1} *oikealta*:

$$\begin{aligned} XA &= B \\ (XA)A^{-1} &= BA^{-1} \\ X(AA^{-1}) &= BA^{-1} \\ XI &= BA^{-1} \\ X &= BA^{-1}\,. \end{aligned}$$

Pidä mielessä, että matriisitulo on liitännäinen ($(AB)C = A(BC)$) muttei vaihdannainen. Siis yleensä $XA \neq AX$.