

1. Määrää  $f_{xy}(x, y)$  kohdassa  $(x, y) = (-1, 1)$ , kun

$$f(x, y) = 5x^2y - 3y + e^{xy}.$$

2. Määrää funktion

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 6xy$$

kriittiset pisteet, lokaalit ääriarvot ja ääriarvojen laatu.

3. Etsi ne kaksi reaalilukua  $x$  ja  $y$ , joiden summa on 12 ja joille summa  $x^3 + y^3$  on mahdollisimman pieni.

4. Määrää funktion

$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$$

suurin arvo, kun muuttujia  $x$  ja  $y$  sitoo ehto  $x - 2y = 10$ .

5. Määrää funktion

$$f(x, y) = 3x + 6y^2 - 5$$

pienin arvo, kun muuttujat  $x$  ja  $y$  ovat positiivisia ja niitä sitoo ehto  $xy = 32$ .

#### Kahden muuttujan funktion kriittisten pisteiden laatu

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

Jos  $D(x, y) > 0$  ja  $f_{xx}(x, y) > 0$ , funktiolla  $f$  on kohdassa  $(x, y)$  lokaali minimi.

Jos  $D(x, y) > 0$  ja  $f_{xx}(x, y) < 0$ , funktiolla  $f$  on kohdassa  $(x, y)$  lokaali maksimi.

Jos  $D(x, y) < 0$ , niin  $(x, y)$  on funktion  $f$  satulapiste.

Jos  $D(x, y) = 0$ , piste  $(x, y)$  voi olla ääriarvokohta tai satulapiste.

*Osittaisia vastauksia kääntöpuolen harjoitustehtäviin:*

2. kriittinen piste  $(-1, 0)$ , jossa lokaali maksimi
3. ei ole
4. kriittiset pisteet: satulapiste  $(-1, -1)$  ja lokaali minimikohta  $(3, 3)$
5.  $a = 1/2$
6. 12 myyjää, varaston arvo 40 000 euroa
7. 77
8. työvoimaan 40 000 euroa, loput laitteistoon.