

Matematiikan peruskurssi
Harjoitus 6 vko 8

to klo 8:15-10 MaD 302
to klo 14:15-16 MaD 302
to klo 18:00-20 MaD 259

1. Derivoi funktio $f(x) = 2x^2 - 1$. Piirrä f ja f' samaan koordinaatistoon. Vertaa funktion f' merkkiä funktion f monotonisuuden kanssa. Mitä huomaat? Entä mitä huomaat funktioiden nollakohdista?

2. Tutki funktion kulkua (eli kasvu, väheneminen, kuperuus, minimi, maksimit ja käännepisteet) ja hahmottele funktion kuvaajaa, kun

$$f(x) = 2x(x + 4)^3.$$

3. Määrä seuraavista yhtälöistä y' implisiittisellä derivoinnilla

a) $x^2 - y^2 = 16$,

b) $y^2 = x^3$,

c) $y^2 - 2x + 4y = 0$.

4. Tunnetaan ympyrän yhtälö

$$(x - 3)^2 + (y - 10)^2 = 25.$$

Ratkaise niiden tangentsuorien yhtälöt, jotka sivuavat ympyrää kohdassa $x = 0$.

5. a) Millä a :n arvoilla funktio

$$f(x) = 2(a^2 - 4)x - 3a^2 + 1$$

on kaikkialla kasvava?

- b) Millä a :n arvoilla funktiolla

$$f(x) = ax^3 + ax^2 + x + 1$$

ei ole paikallisia ääriarvoja?

6. Laske suljetulla välillä $[-10, 10]$ funktion

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{kun } x \leq 1 \\ x^4 - 1, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

lokaalit ja absoluuttiset ääriarvot. Muista tutkia aluksi millä muuttujan x arvoilla funktio on määritelty, jatkuva ja derivoituva. Perustele vastauksesi.

7. Sylinterin muotoisen säiliön tilavuuden on oltava $32\pi \text{ m}^3$. Pohjan ja kannen valmistuskustannukset pinta-alayksikköä kohden ovat kaksinkertaiset sivuihin verrattuna. Millainen säiliö on halvin valmistaa?

8. Olkoon funktio $f : M_f \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}.$$

Funktion määrittelyjoukko M_f on laajin mahdollinen tason \mathbb{R}^2 osajoukko, jossa funktio on määritelty.

a) Määrää joukko M_f .

b) Laske lisäksi funktion arvot $f(1, -1)$, $f(4, 2)$ ja $f(-2, -3)$.

9. Olkoon funktio $f : M_f \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \ln(x - y - 1).$$

Funktion määrittelyjoukko M_f on laajin mahdollinen tason \mathbb{R}^2 osajoukko, jossa funktio on määritelty.

a) Määrää joukko M_f .

b) Laske lisäksi funktion arvot $f(-3, -5)$, $f(2e, e - 1)$ ja $f(4e^3 + 5, 3e^3 + 4)$.

10. Hahmottele seuraavien funktioiden tasa-arvokäyriä (vähintään kolme tasa-arvokäyrää kustakin funktiosta).

a) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2$,

b) $g(x, y) = x + y$,

c) $h(x, y) = xy$.