

**Matematiikan peruskurssi**  
**Harjoitus 7 vko 9**

to klo 8:15-10 MaD 302  
to klo 14:15-16 MaD 302  
to klo 18:00-20 MaD 259

1. Olkoon funktio  $f : M_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2.$$

Määritä funktion määrittelyjoukko  $M_f$ . Hahmottele funktion kuvaajaa käyttäen apuna funktion tasa-arvokäyriä. Piirrä tasa-arvokäyrät ensin xy-koordinaatistoon ja vasta sitten funktion kuvaaja xyz-koordinaatistoon. (vihje: ellipsin yhtälö)

2. Olkoon funktio  $f : M_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

Määritä funktion määrittelyjoukko  $M_f$ . Hahmottele funktion kuvaajaa käyttäen apuna funktion tasa-arvokäyriä. Piirrä tasa-arvokäyrät ensin xy-koordinaatistoon ja vasta sitten funktion kuvaaja xyz-koordinaatistoon. (vihje: mieti myös funktion arvojoukkoa)

3. Määrää seuraavien funktioiden molemmat ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat. Muista tarkistaa derivoituvuus!

- a)  $f(x, y) = 4x^4 + 4x^2y^3 - y$ ,  
b)  $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ ,  
c)  $f(x, y) = e^{2x+3y}$ .

4. Määrää seuraavien funktioiden molemmat ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat. Muista tarkistaa derivoituvuus!

- a)  $f(x, y) = \frac{10y}{x - y}$ ,  
b)  $f(x, y) = \ln(2xy)$ ,  
c)  $f(x, y) = e^x \ln(x + y)$ .

5. Määrää seuraavien funktioiden kaikki ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat. Muista tarkistaa derivoituvuus!

- a)  $f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^3y^2 - y^3$ ,  
b)  $g(x, y) = e^{x^2+y^2} - x^2 \ln y$ .

6. Määrää seuraavien funktioiden kaikki ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat. Muista tarkistaa derivoituvuus!

- a)  $f(x, y) = x^2 + x^3y^4 + y^3$ ,  
b)  $g(x, y) = \frac{2}{x^3 + y^2}$ .

7. Ideaalikaasulle on voimassa laki

$$pV = nRT,$$

missä  $n$  ja  $R$  ovat vakioita. Osoita, että

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1.$$

8. Osoita, että yhtälö

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

on totta, kun  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

9. Ratkaise funktion

$$f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9$$

kriittiset pisteet ja tulkitse kyseisten pisteiden laatu alla olevan taulukon avulla ts. ratkaise onko kyseessä ääriarvopiste, ja jos on niin onko se maksimi vai minimi piste.

10. Ratkaise funktion

$$g(x, y) = x^3 - 3xy - y^3 - 1$$

kriittiset pisteet ja tulkitse kyseisten pisteiden laatu alla olevan taulukon avulla ts. ratkaise onko kyseessä ääriarvopiste, ja jos on niin onko se maksimi vai minimi piste.

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

---

Jos $D(x, y) > 0$ ja $f_{xx}(x, y) < 0$ ,	funktiolla $f$ on pisteessä $(x, y)$ lokaali maksimi.
Jos $D(x, y) > 0$ ja $f_{xx}(x, y) > 0$ ,	funktiolla $f$ on pisteessä $(x, y)$ lokaali minimi.
Jos $D(x, y) < 0$ ,	funktiolla on pisteessä $(x, y, f(x, y))$ satulapiste.
Jos $D(x, y) = 0$ ,	piste $(x, y)$ voi olla lokaali maksimi- tai minimikohta tai satulapiste