

**Matematiikan peruskurssi**  
**Harjoitus 10 vko 13**

to klo 8:30-10 MaD 302  
to klo 14:15-16 MaD 302  
to klo 16:15-18 MaD 259

HUOM! Laskuharjoitukset ovat vasta pääsiäisen jälkeen torstaina 31. maaliskuuta. Jarin ryhmä kokoontuu tuolloin normaalisti kello 18:00 - 20 salissa MaD259.

Tehtävissä 1-3 laske epäoleelliset integraalit.

1.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x} dx$$

2.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{1+2x} dx$$

3.

Laske  $\int_0^4 f(x) dx$ , kun  $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{kun } x \leq 2 \\ x^2 + 2, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$ .

Ohje: Ole tarkkana missä tarvitset epäoleellista integrointi. Muista myös:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

4. Mitä kertalukua ovat seuraavat differentiaaliyhtälöt?

a)  $y'' + y' - y = 4$

b)  $\frac{y'}{y''} + 3 = 0$

c)  $y' + 4y = 2$

d)  $2y' + 2 = y'y$

e)  $y'y''' + 4 = 3$

f)  $\frac{y''}{y'} - y = 6$

5. Osoita, että  $y = e^{-x}(C + \sin 4x)$  on differentiaaliyhtälön

$$y' + y = 4e^{-x} \cos 4x$$

yleinen ratkaisu. Määrää lisäksi alkuehdon  $y(0) = 0$  toteuttava yksittäisratkaisu. (Ohje: Ratkaise  $y'$  ja sijoita  $y'$  ja  $y$  yhtälöön.)

6. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt

a)  $y'' = (2x + 1)e^x$  (Ohje: osittaisintegrointi)

b)  $y' = y(1 + 2x)$

(Ohje: separoituva differentiaaliyhtälö. Muista ratkaista myös erikoisratkaisu!)

7. Ratkaise seuraavien differentiaaliyhtälöiden yksittäisratkaisut, jotka toteuttavat alkuehdon  $y(1) = 3$

a)  $y' = 2x + 3 + e^x$  (Ohje: integroitava)

b)  $x^2y' = y$  (Ohje: separoituva)

8. Jatkuvakorkoiselle tilille on talletettu 100 000 euroa. Tilin korkokanta on 2%/vuosi. Muodosta differentiaaliyhtälö, jonka avulla voidaan ratkaista tilin saldo  $S$  (euroa) hetkellä  $t$  (v). Mikä alkuehto ratkaisufunktion on toteutettava? Ratkaise muodostamasi alkuarvotehtävä. Minkä ajan kuluttua tilin saldo olisi 110 000 euroa? (Apua tehtävään löydät luennon autoesimerkistä sekä kirjan esimerkeistä ja tehtävistä.)