

1. Tutki funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 4x - \frac{3}{2}$ kulkua; ts. etsi ääriarvot, käännepisteet ja nollakohdat sekä tutki millä x :n arvoilla f on kasvava, vähenevä, ylös- tai alaspäin kupera.
2. (JATKOA) Piirrä funktioiden f , f' ja f'' kuvaajat samaan koordinaatistoon. Mitä kullekin kuvaajalle tapahtuu edellä lasketuissa ääriarvo- ja käännepisteissä?
3. Lieriön muotoisen säiliön tilavuuden on oltava 32π litraa. Pohjan ja kan-
nen valmistuskustannukset pinta-alayksikköä kohden ovat kaksinkertaiset
sivuihin verrattuna. Määrää halvimman säiliön mitat.
(Lieriön tilavuus = pohjan ala \cdot korkeus; ympyrän ala = $\pi \cdot$ säteen neliö.)
4. Tarkastellaan yhtälön $2x^2 - 3xy + y^2 = 4$ toteuttavia pisteitä $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Jos
 $x = 3$, niin mitä arvoja y voi saada? Määrää implisiittinen derivaatta $y'(x)$
ja laske sen arvo em. pisteissä.
5. (JATKOA) Ratkaise em. yhtälöstä y x :n funktiona. Derivoi saamasi funk-
tio(t) normaalisti ja vertaa tulosta edelliseen tehtävään. Hahmottele myös
funktio(ide)n kuvaaj(i)a.
6. Missä pisteissä $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ellipsi $5(x - 3)^2 + 9(y - 2)^2 = 81$ leikkaa koor-
dinaattiakseleita? Määritä näissä kolmessa pisteessä ellipsiä sivuavien tan-
genttisuorien yhtälöt. Piirrä kuvio.
7. Olkoon funktion $f : M_f \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$, määrittelyjoukko M_f laajin
mahdollinen tason \mathbb{R}^2 osajoukko, jossa funktion lauseke on määritelty.
Määrää joukko M_f ja laske funktion arvot $f(1, -1)$, $f(4, 2)$ ja $f(-2, -3)$.
Piirrä viisi em. funktion tasa-arvokäyrää.

JATKUU SEURAAVALLA SIVULLA

8. Seuraavassa "todistetaan", että kaikki kissat ovat samanvärisiä. Missä koh-
taa päättely menee vikaan?
- Väite: Kaikille luvuille $n \in \mathbb{N}$ pätee: jokaisessa n :n kissan joukossa kaikki kissat ovat samanvärisiä.
 - Jokaisessa yhden kissan joukossa kaikki kissat ovat selvästikin samanvärisiä, eli väite pätee kun $n = 1$.
 - Tehdään induktio-oletus: on jokin luku $n = k \in \mathbb{N}$ siten, että jokaisessa k :n kissan joukossa kaikki kissat ovat samanvärisiä.
 - Osoitetaan, että tällöin välttämättä väite pätee myös luvulla $n = k + 1$.
 - Olkoon \mathcal{J} mikä tahansa $k + 1$ kissan joukko. Poimitaan sieltä umpimähkään kaksi kissaa A ja B . Väitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että A ja B ovat samanväriset.
 - Tarkastellaan joukon \mathcal{J} kaikkia muita kissoja paitsi A :ta (siis joukon $\mathcal{J} \setminus \{A\}$ kissoja). Niitä on k kpl, joten induktio-oletuksen nojalla ne ovat kaikki samanvärisiä.
 - Tarkastellaan joukon \mathcal{J} kaikkia muita kissoja paitsi B :tä. Nekin ovat induktio-oletuksen nojalla samanvärisiä, koska niitä on k kpl.
 - Olkoon C joku muu kissa joukossa \mathcal{J} , eri kuin A tai B .
 - Nyt B ja C kuuluvat k -kissaiseen joukkoon $\mathcal{J} \setminus \{A\}$ ja ovat siis samanväriset.
 - Kissat A ja C kuuluvat joukkoon $\mathcal{J} \setminus \{B\}$ ja ovat siis samanväriset.
 - Näin ollen C -kissa on samanvärinen kuin A ja samanvärinen kuin B , joten A ja B ovat keskenäänkin samanväriset.

*** **

Harjoitukset torstaisin klo 8 MaD 302, klo 14 MaD 302, klo 18:00 MaD 259

Viikon 8 asiat: Yhden muuttujan funktion differentiaalilaskentaa, ss. 79–105.

Kahden muuttujan funktio, ss. 140–152.

<http://www.math.jyu.fi/ylemat/Peruskurssi>

*** **