Matematiikan peruskurssi (MATY020) 7. harjoitus 9.3.2006

1. Piirrä xyz-koordinaatistoon funktion $f : M_f \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ kuvaaja, kun M_f on neliö, jonka kärjet ovat $(0,0), (1,0), (1,-1), (0,-1)$. (Vertaa tehtävään 6/7; käytä tasa-arvokäyriä apuna.)

2. Määritä funktion $f : M_f \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \sqrt{9-x^2-2y^2}$ laajin mahdollinen määrittelyjoukko M_f. Piirrä xy-koordinaatistoon muutama tasa-arvokäyrä. Hahmottele funktion kuvaajaa tasa-arvokäyrien ja/tai pystyleikkauskäyrien avulla. Mikä on funktion arvojoukko?

3. Laske seuraavien funktioiden molemmat ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat.

$$f(x,y) = 4x^4 + 4x^2y^3 - y, \quad f(x,y) = \sqrt{9-x^2-2y^2}, \quad f(x,y) = e^{2x+3y}.$$

Missä pisteissä (x,y) osittaisderivaatat ovat olemassa? Entä missä pisteissä molemmat osittaisderivaatat ovat nollia (ts. mitkä ovat kriittisiä pisteitä)?

4. Samat kysymykset funktioille

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}, \quad f(x,y) = \ln(2xy), \quad f(x,y) = e^x \ln(x+y).$$

5. Laske tehtävän 3 funktioiden toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

6. Laske tehtävän 4 funktioiden toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

7. Päättele (esim. oheisen taulukon avulla) tehtävissä 3 ja 4 löytämiesi kriittisten pisteiden laatu, ts. ovatko ne maksimi-, minimi- vai satulapisteitä.

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$$

Jos $D(x,y) > 0$ ja $f_{xx}(x,y) > 0$,	niin funktiolla f on pisteessä (x,y) lokaali minimi.
Jos $D(x,y) > 0$ ja $f_{xx}(x,y) < 0$,	niin funktiolla f on pisteessä (x,y) lokaali maksimi.
Jos $D(x,y) < 0$,	niin (x,y) on funktion f satulapiste.
Jos $D(x,y) = 0$,	niin (x,y) voi olla lokaali maksimi- tai minimipiste tai satulapiste

*** ***

Harjoitukset torstaisin klo 8 MaD 302, klo 14 MaD 302, klo 18:00 MaD 259

Viikon 9 asiat: Kahden muuttujan funktio, osittaisderivointi, ss. 140–164.

`http://www.math.jyu.fi/ylemat/Peruskurssi`