

Matematiikan peruskurssi (MATY020)

6. Harjoitus 29.2.2007

Harjoitusryhmät torstaisin: 8-10 MaD302, 14-16 MaD302, 18-20 MaD259

Käytä tehtävissä 1 ja 2 ainakin kerran osittaisintegrointia ja ainakin kerran integrointia sijoitusmenetelmällä. Mitkä kohdat on mahdollista laskea ilman näitä?

1. Määritä

a) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx$

2. Määritä

a) $\int x \sin(x^2) dx$

b) $\int_0^3 x^2 (2x-4)^6 dx$

3. a) Päättelä ilman työläitä laskuja määrätyn integraalin $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ suuruus.

b) Määritä a-kohdan integraali sijoittamalla $x = \sin t$. (Kaava, jota voit tarvita:

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t))$$

4. a) Määritä funktion $f(x) = \frac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1}$ ääriarvot, suurin ja pienin arvo sekä hahmottele kuvaaja.

b) Määritä funktion $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ääriarvot, suurin ja pienin arvo sekä hahmottele kuvaaja

5. a) Kuinka monta kertaa käyrät $y = \frac{1}{x}$ ja $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ leikkaavat toisensa?

b) Määritä käyrien $y = \frac{1}{x}$ ja $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ sekä suorien $x = \frac{1}{2}$ ja $x = 3$ rajaaman alueen pinta-ala.

6. Kurssilla saa pisteitä harjoitustehtävistä siten, että kun on ratkaissut 40 % tehtävistä saa 1 pisteen ja kun on ratkaissut 90 % tehtävistä saa 6 pistettä.

a) Halutaan, että pistemäärä kasvaa vakionopeudella välillä 40% – 90%. Määritä funktio $f(x)$, joka ilmoittaa pistemäärän ratkaisuprosentin x funktiona. Pisteet pyöristetään vasta tämän jälkeen (eli voi saada esim. 3,64 pistettä). (Luennoitsija voi kopioida tämän funktion excel-tilukkaan, jotta ohjelma ilmoittaa suoraan kunkin opiskelijan saamat pisteet.)

b) Halutaan, että pistemäärän kasvunopeus on suoraan verrannollinen ratkaisuprosenttiin (eli $f'(x) = Ax$, $A = \text{vakio}$). Määritä funktio $f(x)$, joka ilmoittaa pistemäärän ratkaisuprosentin x funktiona.

c) Halutaan, että pistemäärän kasvunopeus on kääntäen verrannollinen ratkaisuprosenttiin (eli $f'(x) = A \frac{1}{x}$, $A = \text{vakio}$). Määritä funktio $f(x)$, joka ilmoittaa pistemäärän ratkaisuprosentin x funktiona.

d) Piirrä funktion $f(x)$ kuvaaja kohdissa a, b ja c. Pohdi kenen kannalta mikäkin vaihtoehto olisi hyvä.

7. Kirjan sivulla 114 määriteltiin funktion $f(x)$ keskiarvoksi välillä $[a, b]$ $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Miksi

funktion keskiarvo on järkevää määritellä näin? Muuttuuko tilanne jotenkin, jos funktion $f(x)$ kuvaaja on välillä $[a, b]$ myös x -akselin alapuolella? Miksi muuttuu tai miksi ei muutu? Varaudu esimerkiksi piirtämään kuva taululle ja selittämään.

8. Ratkaise differentiaaliyhtälöt.

a) $4y' + 12x = 4e^{2x}$

b) $\frac{y''}{6} = 2x - 1$ ja $y(1) = 5$ ja $y(2) = 12$