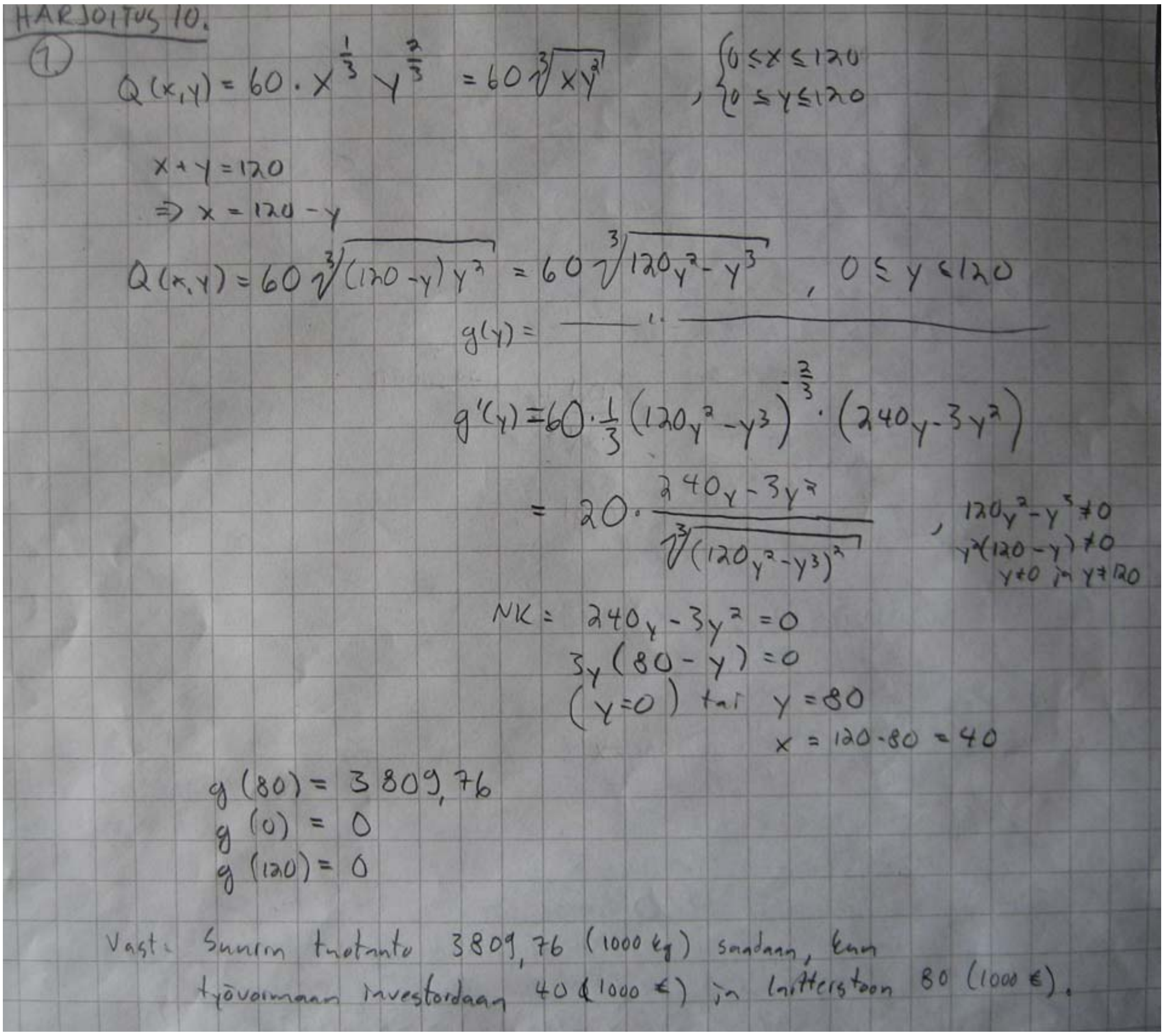
Matematiikan peruskurssi (MATY020)

Kertausharjoitukset 29.3.2007 RATKAISUT

Yritä ratkaista ensin itse!

1. Tehtaan tuotantomäärän Q (1000 kg) oletetaan riippuvan työvoimaan investoinnin määrästä x (1000 €) ja laitteistoon investoinnin määrästä y (1000 €) seuraavan funktion mukaisesti: $Q(x,y) = 60\sqrt[3]{xy^2}$. Määritä, kuinka 120000 € budjetti on jaettava tuotantotekijöiden x ja y kesken, jotta tehtaan tuotanto olisi mahdollisimman suuri. Kuinka suuri on suurin tuotanto?



HARJOITUS 10.

1

$$Q(x,y) = 60 \cdot x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = 60\sqrt[3]{xy^2} \quad , \begin{cases} 0 \le x \le 120 \\ 0 \le y \le 120 \end{cases}$$

$x + y = 120$

$\Rightarrow x = 120 - y$

$$Q(x,y) = 60\sqrt[3]{(120-y)y^2} = 60\sqrt[3]{120y^2 - y^3} \quad , \; 0 \le y \le 120$$

$g(y) =$

$$g'(y) = 60 \cdot \frac{1}{3}(120y^2 - y^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (240y - 3y^2)$$

$$= 20 \cdot \frac{240y - 3y^2}{\sqrt[3]{(120y^2-y^3)^2}} \quad , \; 120y^2 - y^3 \neq 0$$

$y^2(120-y) \neq 0$

$y \neq 0$ ja $y \neq 120$

NK: $240y - 3y^2 = 0$

$3y(80 - y) = 0$

$(y = 0)$ tai $y = 80$

$x = 120 - 80 = 40$

$g(80) = 3809{,}76$

$g(0) = 0$

$g(120) = 0$

Vast: Suurin tuotanto 3809,76 (1000 kg) saadaan, kun työvoimaan investoidaan 40 (1000 €) ja laitteistoon 80 (1000 €).

2. Määritä funktion $f(x, y) = x^2 y - x^2 - y$ suurin ja pienin arvo, kun $0 \le y \le -x^2 + 4$. Missä pisteissä nämä arvot saadaan?
(Lisäkysymys: ovatko nämä myös funktion suurin ja pienin arvo, jos ehdosta $0 \le y \le -x^2 + 4$ luovutaan?)

2.) Krp: $\begin{cases} f_x = 2xy - 2x = 0 \\ f_y = x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 1$

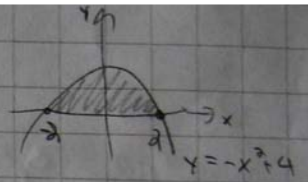
$x = 1$:
$2y - 2 = 0$
$y = 1$

$x = -1$:
$-2y + 2 = 0$
$y = 1$

Krp: $(1,1)$ ja $(-1,1)$

$f(1,1) = -1$, $f(-1,1) = -1$

1.) Reuna: $\begin{cases} y \ge 0 \\ y \le -x^2 + 4 \end{cases}$



$y = -x^2 + 4$
NK: $-x^2 + 4 = 0$
$x = \pm 2$

A) $y = 0$, $-2 \le x \le 2$
$f(x,y) = f(x,0) = -x^2$
Suurin arvo $f(0,0) = -0^2 = 0$ ← suurin
Pienin —"— $f(\pm 2, 0) = -(\pm 2)^2 = -4$ ← pienin

B) $y = -x^2 + 4$, $-2 \le x \le 2$
$f(x,y) = x^2(-x^2+4) - \cancel{x^2} - (\cancel{-x^2}+4) = -x^4 + 4x^2 - 4$
Merk. $g(x) = -x^4 + 4x^2 - 4$.
$g'(x) = -4x^3 + 8x = 0$
$4x(-x^2 + 2) = 0$
$x = 0 \lor x = \sqrt{2} \lor x = -\sqrt{2}$
$y = 4$ $\quad y = 2$ $\quad y = 2$

$f(0,4) = -4$ ← pienin
$f(\sqrt{2}, 2) = 2 \cdot 2 - 2 - 2 = 0$ ← suurin
$f(-\sqrt{2}, 2) = 0$

Vast: Suurin arvo 0 pisteissä $(\sqrt{2}, 2)$, $(-\sqrt{2}, 2)$ ja $(0,0)$.
Pienin —"— -4 —"— $(0,4)$, $(2,0)$ ja $(-2,0)$

Lisäkys.: $x = 0 \Rightarrow f(x,y) = -y \xrightarrow{y \to \pm\infty} \mp\infty$ ⇒ Ei pienintä eikä suurinta arvoa.
TAI: krp:t satulapisteitä ⇒ —"—

3. Esa alkaa säästää rahaa tallettamalla tammikuun alusta alkaen joka kuun alussa 100 € tilille, jonka nettokorkokanta on 3 %/vuosi. Tilillä korko lisätään pääomaan aina vuoden lopussa.

a) Kuinka paljon Esa säästää tällä tavoin 14 vuodessa?

b) Mitä rahasummaa Esan 14 vuoden säästöt vastaavat sillä hetkellä kun Esa aloittaa säästämisen?

a) 1. vuoden lopussa:

$$12 \cdot 100 + 100 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{78}{12} = 1219{,}5$$

14. vuoden lopussa:

$$K_{14} = 1{,}03^{13} \cdot 1219{,}5 + \dots + 1219{,}5 = \frac{1219{,}5\,(1-1{,}03^{14})}{1-1{,}03} \approx \underline{\underline{20836{,}77}}$$

b)

$$k = \frac{K_{14}}{1{,}03^{14}} \approx \underline{\underline{13\,775{,}56}}$$

4. a) Ratkaise Cramerin säännöllä yhtälöryhmä $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$. Piirrä yhtälöryhmän toteuttavat pisteet kolmiulotteiseen koordinaatistoon.

a) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & -2 \\ -7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - (-1)(-7) = 28$$

$+ \quad \cdot 2 \qquad + \quad \cdot(-3)$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & -2 \\ -7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 28 \qquad x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 1$$

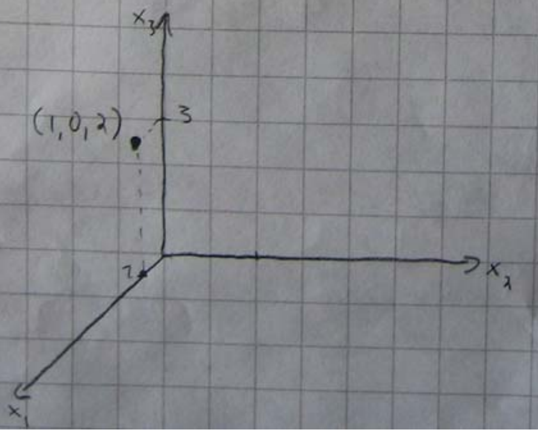
$+ \quad \cdot 2 \qquad + \quad \cdot(-5)$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & 7 & -2 \\ -7 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = 0$$

$\cdot(-5) \qquad \cdot(-3)$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \ldots = 56$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = 2$$



b) Ratkaise Gaussin Jordanin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmä $\begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ -4x - 3y + 3z = -35 \\ x - y + z = 14 \end{cases}$.

Piirrä yhtälöryhmän toteuttavat pisteet kolmiulotteiseen koordinaatistoon.

b) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ -4x - 3y + 3z = -35 \\ x - y + z = 14 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 \\ -4 & -3 & 3 & -35 \\ 1 & -1 & 1 & 14 \end{array}\right) \cdot 4$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -15 \\ 1 & -1 & 1 & 14 \end{array}\right) (-1)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -15 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \end{array}\right) :5$

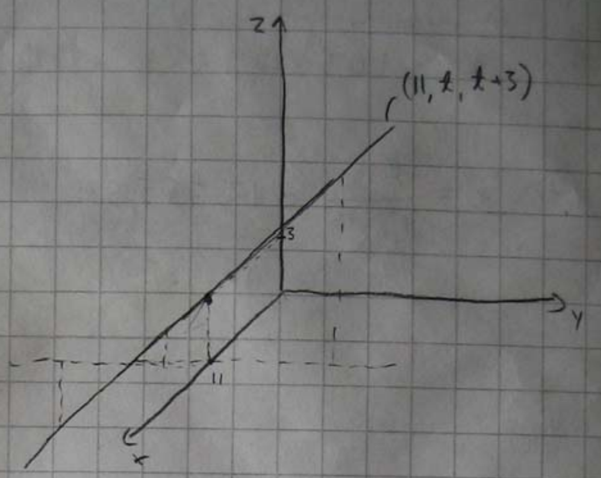
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \end{array}\right) \cdot 3$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot (-2)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y - z = -3 \\ (z = z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ z = y + 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = t \\ z = t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = -3 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$



Tarkistus: $\begin{cases} 11 + 2t - 2(t+3) = 5 \\ -4 \cdot 11 - 3t + 3(t+3) = -35 \\ 11 - t + t + 3 = 14 \end{cases}$ OK!

5. Oletetaan, että tuotteen kuukausittainen menekki f (kpl/kk) riippuu sen myyntihinnasta x (€/kpl) funktion $f(x) = x^3 - 105x^2 + 3650x - 41000$ mukaisesti.

a) Määritä tuotteen suurin ja pienin menekki kun tiedetään, että myyntihinnan täytyy olla vähintään 29 €/kpl ja enintään 40 €/kpl.

$f(x) = x^3 - 105x^2 + 3650x - 41000$, $29 \le x \le 40$

a) $f'(x) = 3x^2 - 210x + 3650 = 0$

$$x = \frac{210 \pm \sqrt{300}}{6}$$

$x \approx 37{,}9$ tai $x \approx 32{,}1$ (sovellustehtävässä riittää likiarvo)

$f(37{,}9) \approx 951{,}9$

$f(32{,}1) \approx 1048{,}1$

$f(40) = 1000$

$f(29) = 934$

Suurin menekki on 1048 (kpl/kk).

Pienin menekki on 934 (kpl/kk).

b) Millä myyntihinnalla hinnan muuttaminen vaikuttaa voimakkaimmin menekkiin?

b) Milloin $f'(x)$ on itseisarvoltaan suurin?

$f''(x) = 6x - 210 = 0$

$x = 35$

$f'(35) = -25$

$f'(29) = 83$

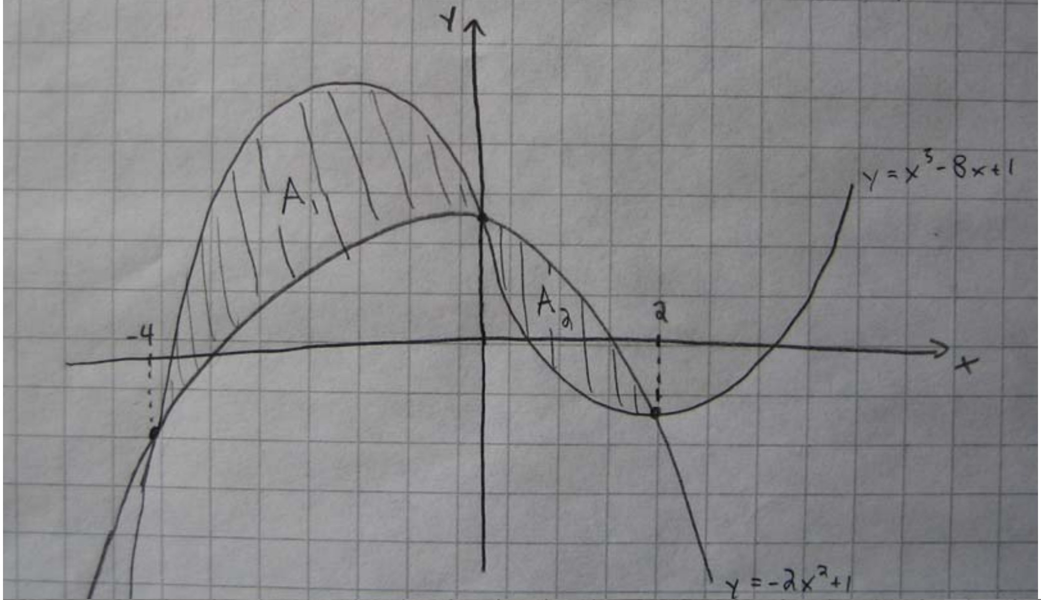
$f'(40) = 50$

Siis myyntihinnalla 29 (€/kpl) hinnan muuttaminen vaikuttaa voimakkaimmin menekkiin.

6. Määritä funktioiden $f(x) = x^3 - 8x + 1$ ja $g(x) = -2x^2 + 1$ kuvaajien rajaaman äärellisen alueen pinta-ala. Piirrä kuva, jossa alue näkyy.

Leikkauspisteet:

$$x^3 - 8x + 1 = -2x^2 + 1$$
$$x^3 + 2x^2 - 8x = 0$$
$$x(x^2 + 2x - 8) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = -4$$



$$A_1 = \int_{-4}^{0} \left(x^3 - 8x + 1 - (-2x^2 + 1)\right) dx = \int_{-4}^{0} \left(x^3 + 2x^2 - 8x\right) dx = \Big/_{-4}^{0} \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 = -\left(4^3 - \frac{2}{3}4^3 - 4^3\right)$$
$$= 42\frac{2}{3}$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} -x^3 - 2x^2 + 8x = \Big/_{2}^{0} \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 = -\left(4 + \frac{16}{3} - 16\right) = 6\frac{2}{3}$$

$$A = A_1 + A_2 = 49\frac{1}{3}$$

7. Ratkaise differentiaaliyhtälö.

a) $y' = 3yx^2 - y$

b) $y' = 3yx^2 - y$, $y(2) = -10$

c) $(-2x^2+3)^2 y' = x$ (Vihje: sulkuja ei kannata kertoa auki; mieti ennemmin mitä yritetään ratkaista)

a) $y' = 3yx^2 - y \quad || : y, \; y \neq 0$

$\frac{y'}{y} = 3x^2 - 1$

$\int \frac{1}{y} y' \, dx = \int (3x^2-1) \, dx$

$\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{\cancel{dx}} \cancel{dx} = x^3 - x + C, \; C \in \mathbb{R}$

$\int \frac{1}{y} dy = x^3 - x + C$

$\ln|y| = x^3 - x + C$

$|y| = e^{x^3 - x + C}$

$y = \pm e^{x^3 - x + C}$ tai $y = 0$ (erikoisratkaisu)

b) $y(2) = -10$

$\pm e^{2^3 - 2 + C} = -10$

$e^{6+C} = 10$

$6 + C = \ln 10$

$C = \ln 10 - 6$

Siis $y = -e^{x^3 - x + \ln 10 - 6}$

c) $(-2x^2+3)^2 y' = x \quad || : (-2x^2+3)^2$

$y' = \frac{x}{(-2x^2+3)^2}$

$y = \int x(-2x^2+3)^{-2} dx = -\frac{1}{4} \int (-4x(-2x^2+3)^{-2}) dx$

$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{-1} (-2x^2+3)^{-1} + C$

$= \frac{1}{-8x^2+12} + C, \; C \in \mathbb{R}$

8. Olkoon A ja B 2×2-matriiseja ja $0=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. Onko väite tosi? Perustele!

a) Jos A = 0 tai B = 0, niin AB = 0.
b) Jos AB = 0, niin A = 0 tai B = 0.

a) Olkoon $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ ja $B=\begin{bmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{bmatrix}$, $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$.

Tällöin $AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0b_1+0b_3 & 0b_2+0b_4\\ 0b_1+0b_3 & 0b_2+0b_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Samoin, jos B = 0, niin AB = 0.
Siis väite on tosi.

b) Väite ei ole tosi, koska esimerkiksi

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{\neq 0}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}}_{\neq 0}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$