**Matematiikan peruskurssi (MATY020)**

## 10. Kertausohjaus 26.3.2007 Ratkaisut

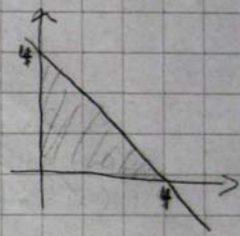
1. a) Määritä funktion $f(x,y) = xy - x - 2y$ suurin ja pienin arvo joukossa $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$.

   b) Määritä funktion $f(x,y) = xy - x - 2y$ suurin ja pienin arvo.

1. $f(x,y) = xy - x - 2y$

a)

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y + x \leq 4 \end{cases} \iff y \leq -x + 4$




1) Mpin reuna

A) $x = 0$, $0 \leq y \leq 4$ $\Rightarrow f(x,y) = -2y \Rightarrow$ suurin arvo $0 = f(0,0)$ ← SUURIN
pienin arvo $-8 = f(0,4)$ ← PIENIN

B) $y = 0$, $0 \leq x \leq 4$ $\Rightarrow f(x,y) = -x \Rightarrow$ — " — $f(0,0) = 0$
$f(0,4) = -4$

C) $y = -x + 4$, $0 \leq x \leq 4$

$\Rightarrow f(x,y) = x(-x+4) - x - 2(-x+4) = -x^2 + 4x - x + 2x - 8$

$f(x) = -x^2 + 5x - 8$

$f'(x) = -2x + 5 = 0$

$x = 2{,}5 \Rightarrow y = -2{,}5 + 4 = 1{,}5$

$f(0) = -8$

$f(4) = -4$

$f(2{,}5) = -1{,}75$

2) Krp: $\begin{cases} f_x = y - 1 = 0 \\ f_y = x - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Krp: $(2,1)$

$f_{xx} = 0$

$f_{yy} = 0$

$f_{xy} = 1$

$D(2,1) = 0 \cdot 0 - 1^2 = -1 \Rightarrow$ satulapiste

Vast: Pienin arvo $f(0,4) = -8$
Suurin arvo $f(0,0) = 0$

b) (Kun $y = 0$ $f(x,y) = -x \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \mp\infty$)

Ainoa krp. satulap. $\Rightarrow$ Ei suurinta eikä pienintä arvoa

2. a) Määritä funktion $f(x) = x^2 + 3x + 1$ kasvunopeus kohdassa, jossa funktion *f(x)* arvo on -1.
b) Laske $D\left(\cos(3x^2 - x) + x^2\right)$.
c) Olkoon $f'(x) = x^2 + 3x + 2$. Paljonko funktion *f(x)* arvot muuttuvat kohdasta *x* = -2 kohtaan *x* = -1?
d) Olkoon $f'(x) = x^2 + 3x + 2$. Mikä on sen äärellisen alueen ala, jonka funktion *f(x)* kuvaaja rajaa *x*-akselin kanssa?
e) Laske $\int \left(xe^{x^2}\right)dx$.

2.

a) $f(x) = x^2 + 3x + 1 = -1$

$x^2 + 3x + 2 = 0$

$x = -1$ tai $x = -2$

$f'(x) = 2x + 3$

$f'(-1) = 1$

$f'(-2) = -1$

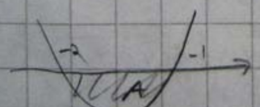
b) $D\left(\cos(3x^2 - x) + x^2\right) = -\sin(3x^2 - x)\cdot(6x - 1) + 2x$

c) $f'(x) = x^2 + 3x + 2$

$\Delta f(x) = \int_{-2}^{-1} (x^2 + 3x + 2)\,dx = \Big/_{-2}^{-1} \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 - \left(-\frac{8}{3} + 6 - 4\right)$

$= -\frac{1}{6}$

d)




$A = -\int_{-2}^{-1} (x^2 + 3x + 2)\,dx = \frac{1}{6}$

e) $\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\left(e^{x^2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$

3. a) Olet saanut urkittua selville, että naapuri maksaa juuri ottamaansa lainaa takaisin 200 € kuussa viiden vuoden ajan. Soittamalla pankkiin saat selville, että kuukausittainen nettokorkokanta on 0,3 %. Paljonko naapuri on ottanut lainaa?
b) Ratkaise tehtävä toisenlaisella ratkaisumenetelmällä.
c) Samaan aikaan naapurin pihaan ilmestyi uusi auto. Autoliikkeestä kerrotaan, että käsirahaa maksetaan yleensä noin 20 % auton hinnasta ja loppusuorituksesta voidaan sopia pankin kanssa. Millaiset kaupat arvioit naapurin tehneen?

3.

$A = 200$

$p = 0{,}3\ \%/kk$

$n = 5 \cdot 12 = 60$

a) $$N = \frac{A\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1\right)}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \cdot \frac{p}{100}} \approx \underline{\underline{10\,966{,}98}}$$

TAI:

b) $$K_n = 1{,}003^{59} \cdot 200 + \dots + 200 = \frac{200(1-1{,}003^{60})}{1-1{,}003} \approx 13126{,}32$$

$$k = \frac{K_n}{1{,}003^{60}} \approx \underline{\underline{10966{,}98}}$$

c) $0{,}8 \cdot x = 10966{,}98$

$x \approx 13\,708{,}73$

4. Ratkaise differentiaaliyhtälö

a) $y' - 2xy^2 = 0$

b) $y' - 2xy^2 = 0$, $y(2) = 0$

4. a) $y' - 2xy^2 = 0$

$y' = 2xy^2 \qquad || : y^2,\ y \neq 0$

$\int \frac{y'}{y^2}\,dx = \int 2x\,dx$

$\int \frac{1}{y^2}\,dy = x^2 + C$

$-\frac{1}{y} = x^2 + C$

$y = -\frac{1}{x^2 + C}$ tai erikoisratk. $y = 0$

b) $y(2) = 0$

$-\frac{1}{2^2 + C} = 0$ tai $0 = 0$

$-\frac{1}{4 + C} = 0$ ei toteudu, kun $C \in \mathbb{R}$

$(-1 = 0)$

Siis $y = 0$