Matematiikan propedeuttinen kurssi (MATY010) syksy 2006

"MITÄ KAAVOJA PITÄÄ OSATA ULKOA TENTISSÄ?"

Kaavoilla voidaan ilmaista erityyppisiä asioita. Tässä esiintyvät kaavat voi jaotella karkeasti *määritelmiin* ja *lauseisiin.* Sekä määritelmiä että lauseita voidaan ilmaista myös sanallisessa muodossa.

Määritelmä kertoo, mitä joku käsite tarkoittaa (esim. *hypotenuusa* on suorakulmaisessa kolmiossa suoran kulman vastainen sivu). Kurssilla esiintyvien käsitteiden (esim. funktio, itseisarvo, ympyrä, määrittelyjoukko, derivaatta, integraali jne.) merkitys on tiedettävä. Alla on muutama esimerkki *kaavamuotoisista* määritelmistä.

Lauseet ovat yleispäteviä sääntöjä, jotka voidaan todistaa perusolettamusten ja määritelmien nojalla (esim. Pythagoraan lause).

Määritelmät on periaatteessa opeteltava ulkoa, koska niitä ei voi päätellä mistään. Lauseet sen sijaan voi päätellä. Muutamat keskeiset lauseet (lähinnä laskusäännöt) on joko osattava todistaa/johtaa tai sitten muistettava ulkoa. Muut kaavat annetaan tentissä jos niitä tarvitaan.

Määritelmien ja kaavojen lisäksi pitää tietysti osata myös niihin perustuvat ratkaisumenetelmät ym. kurssilla käsitellyt asiat.

Määritelmiä

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Kulman yksiköt: täysi kierros on 360° eli 2π radiaania.

Itseisarvo: $|a| = \begin{cases} a, \text{ kun } a \geq 0 \\ -a, \text{ kun } a < 0 \end{cases}$

Potenssi rationaalisin ekspnonentein ($n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a \in \mathbb{R}, a > 0$):

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a; \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \qquad a^0 = 1$$

Funktiot $f : A \to B$ ja $g : B \to A$ ovat toistensa käänteisfunktiot, jos kaikille $x \in A, y \in B$ pätee $f(x) = y \iff x = g(y)$. Tällöin merkitään $g = f^{-1}$.

Logaritmi on eksponenttifunktion käänteisfunktio:
$a^x = y \iff x = \log_a(y)$, kun $a, x, y \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, y > 0$.
Erityisesti $x = e^{\ln x} = \ln e^x = 10^{\lg x} = \lg 10^x$.

Funktio f on *jatkuva* pisteessä x_0, jos $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Derivaatta pisteessä x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Integraalifunktio: $F(x) = \int f(x)\,dx \iff F'(x) = f(x)$

Lauseita yms.

Pythagoraan lause ja sen sovelluksia: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;
kahden pisteen (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) välinen etäisyys $= \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$

Ympyrän kehän pituus $= \pi\cdot$ halkaisija

Muistikolmiot: kulmien $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ sini, kosini ja tangentti

Trigonometristen funktioiden jaksot ja symmetriat (ks. yksikköympyrä!):
$\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(\pi - x) = -sin(2\pi - x)$ jne.

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava

Kahden muuttujan yhtälön ratkaisut (x, y) tason pisteinä muodostavat yleensä jonkin tasokäyrän; esim.

- suoran, jos molemmat muuttujat ovat 1. astetta ($ax + by + c = 0$)
- paraabelin, jos toinen muuttuja on 1. ja toinen 2. astetta ($y = ax^2 + bx + c$)
- ympyrän, ellipsin tai hyperbelin, jos molemmat muuttujat ovat 2. astetta ($ax^2 + by^2 = c$, $xy = c$ tms.)

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Polynomi $P(x)$ on jaollinen tekijällä $(x - x_0)$ kun $P(x_0) = 0$.

Potenssilaskusääntöjä ($x, y \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0, p, q \in \mathbb{R}$):

$$
\begin{aligned}
x^p \cdot x^q &= x^{p+q} \\
x^p \cdot y^p &= (xy)^p \\
(x^p)^q &= x^{pq} = (x^q)^p
\end{aligned}
$$

Raja-arvojen laskusääntöjä (f, g funktioita, $x_0 \in \mathbb{R}$):

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \quad (\in \mathbb{R}) \\
\lim_{x\to x_0} (fg)(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \quad (\in \mathbb{R}) \\
\lim_{x\to\infty} x^p &= \infty, \text{ kun } p > 0 \\
\lim_{x\to\infty} x^p &= 0, \text{ kun } p < 0 \\
\lim_{x\to 0+} x^p &= \infty, \text{ kun } p < 0
\end{aligned}
$$

Derivoimis- ja integroimissääntöjä (f, g funktioita, $A, a, b, c, p \in \mathbb{R}$):

$$
\begin{aligned}
D(f+g) &= f' + g' & \int (f+g) &= \int f + \int g \\
D(A\cdot f) &= A \cdot f' & \int A \cdot f &= A \int f \\
D(x^p) &= p \cdot x^{p-1} & \int_a^b f + \int_b^c f &= \int_a^c f \\
& & \int_a^b f(x)\,dx &= F(b) - F(a)
\end{aligned}
$$