

Matematiikan propedeuttinen kurssi
Harjoitus 1 vko 39

ke klo 8:15-10 MaD 381
to klo 14:15-16 MaA 210
to klo 18:00-20 MaD 259

1. Määää jatkuvan ja aidosti vähenevän funktion $f : x \mapsto f(x)$

- a) arvojoukko, A_f , kun määrittelyjoukko $M_f = [6, 10]$.
- b) määrittelyjoukko M_f , kun arvojoukko $A_f =]4, 5]$.

2. Laske $f(g(x))$ ja $g(f(x))$, kun

- a) $f(x) = \sqrt{x+1}, x \geq -1$
 $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$
- b) $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$
 $g(x) = x+3, x \in \mathbb{R}$
- c) $f(x) = \frac{x^2}{9}, x \in \mathbb{R}$
 $g(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}, x \geq 0$.

Muista yhdistetyn funktion määrittelyjoukon tarkistaminen!

3. a) Keksi ainakin kaksi erilaista funktioparia $f(x)$ ja $g(x)$, jotka toteuttavat yhdistetyn funktion $(f \circ g)(x) = \frac{2x}{2x+3}$.

b) Millainen sisäfunktio $g(x)$ toteuttaa yhdistetyn funktion $(f \circ g)(x) = 3x$, kun ulkofunktio $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}, x > 0$?

4. Ratkaise käänteisfunktio, $f^{-1}(x)$, kun $f(x) = -4x + 3$. Muista tutkia määrittely- ja arvojoukko.

5. Ratkaise käänteisfunktio, $g^{-1}(x)$, kun $g(x) = \frac{1}{x+1}$. Muista tutkia määrittely- ja arvojoukko.

6. Funktiolla $f(x) = \frac{1}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$ on käänteisfunktio

- a) Määritä $f^{-1}(\frac{1}{2})$.
- b) Määritä $f^{-1}(2)$.
- c) Millä x :n arvolla käänteisfunktio saa arvon 4?
- d) Määritä f^{-1} .

HUOM! Laske kohdat a) - c) tuntematta käänteisfunktiota.

7. Olkoon $g(x) = \frac{ax + 3 + b}{2}$ ja $f(x) = 2x - 3$. Määritä vakiot a ja b siten, että $(g \circ f)(x) = x$ toteutuu kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Vihje & muistin virkistystä: Yhtälö, jossa on useampi tuntematon vakio (tässä a ja b), on identtisesti tosi kaikilla muuttujan x reaalilukuarvoilla, jos molemmat yhtälön puolet ovat yhtäsuuret. Tässä tapauksessa vakiotermejä on molemmilla puolin yhtäsuuruusmerkkiä yhtäpaljon ja muuttujan kertoimet ovat molemmilla puolin yhtäsuuruusmerkkiä yhtäsuuret. Näistä tiedoista päädytään yhtälöpariin, jonka ratkaisuna saadaan kysytyjen vakioiden arvot.

8. Mitä voit kertoa funktion juurista, kun tiedetään, että funktion $f(x)$ arvojoukko on $A_f = [-8, 9]$ ja määrittelyjoukossaan M_f funktio on
- monotoninen.
 - aidosti monotoninen.

Miten funktion jatkuvuus tai epäjatkuvuus vaikuttavat näissä tilanteissa juurien määrään?

9. Laske, jos mahdollista, seuraavien funktioiden juuret.

- $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = (2x - 1)(x + 1)$ ja $(g \circ f)(x)$.
- $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$, $k(x) = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$ ja $s(x) = h(x) + k(x)$.

10. Toisen asteen polynomifunktiosta $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiedetään, että sen

- Toisen asteen termin kerroin $a > 0$ ja diskriminantti $D = 0$.
- Toisen asteen termin kerroin $a < 0$ ja diskriminantti $D > 0$.
- Funktion juuret ovat $x_1 = 2$ ja $x_2 = 4$ ja funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka huippu sijaitsee xy -koordinaatiston pisteessä $(3, 4)$.

Piirrä kullekin tapaukselle esimerkkikuva. Määrää lisäksi funktio, joka toteuttaa ehdot.

Tehtävät 9 ja 10 ovat vanhojen asioiden kertaamista. Voit etsiä apua niiden ratkaisemiseen kurssikirjan lisäksi vanhoista lukion matematiikan kirjoistasi ja taulukkokirjasta.

Ensi viikolla (viikko 39) käsiteltäviä asioita: surjektio, injektio, bijektio, identtisesti tosi yhtälö ja identtisesti epätosi yhtälö, polynomifunktiot ja -yhtälöt, polynomifunktioiden juurien ratkaiseminen, polynomien tekijöihin jakaminen. Mikäli haluat voit kerrata kyseisiä asioita etukäteen. Viikon 40 laskuharjoitukset liittyvät näihin asioihin.