

Matematiikan propedeuttinen kurssi
Harjoitus 6 vko 44

ke klo 8:15-10 MaD 381
to klo 14:15-16 MaA 210
to klo 18:00-20 MaD 259

1. Ratkaise epäyhtälöt

a)

$$x - \sqrt[3]{x^3 - x} > 1$$

b)

$$\frac{1}{2x - 1} \leq \frac{1}{4}$$

Laske seuraavissa tehtävissä raja-arvo. Ole tarkkana raja-arvon olemassaolon suhteen.

2. a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x}{x + 2}$$

3. a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2 + x}{x} \left(\frac{2}{x + 1} - \frac{1}{x} \right) \right]$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4x + 3x^2}{2 + 3x - 5x^2}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2}{x^2}$$

4. a)

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - 2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3 - 1}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x - 2}$$

5. a) Määritä $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, kun

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{kun } x < -1 \\ 2x - 1, & \text{kun } x > -1 \end{cases}$$

Piirrä myös kyseisen funktion kuvaaja.

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$$

6. Määritä $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, kun $f(x)$ on

a) $\frac{x^2 + 2}{|x|}$ b) $\frac{3x - |x|}{4x - 2|x|}$

7. Pisteen $(2, 3)$ kautta kulkeva laskeva suora leikkaa positiivisen x -akselin pisteessä $A = (x, 0)$ ja positiivisen y -akselin pisteessä B . Olkoon piste $C = (2, 0)$. Määritä kolmion ABC pinta-ala muuttujan x funktiona ja laske alan raja-arvo, kun piste A lähestyy pistettä C .

8. Tutki onko funktiolla $f: f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$ raja-arvoa kohdassa

a) 0, b) -1 ja c) 1 ?

9. Millä vakion a arvoilla

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + ax - 3a^2}{x - 1}$$

on olemassa? Laske myös kyseiset raja-arvot. Huom! kyseessä ei ole epäoleellisen raja-arvon laskeminen.

10. Laske

a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{x^4 + x}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^x}{1 - 2^x}$$

Vihjeitä: raja-arvoja laskettaessa on pyrittävä supistamaan pois se tulon tekijä, joka vie laskun muotoon " $\frac{0}{0}$ " tai " $\pm \frac{\infty}{\infty}$ ". Mikäli tekijän löyäminen on vaikeaa, voi yrittää supistaa esimerkiksi nimittäjän suurimman potenssin omaavalla termillä. Lausekkeissa, joissa on juurta, ja laventaminen/supistaminen millään lausekkeella ei ole mahdollista, voi yrittää saattaa kaikki termit saman juuren alle. Tilanteissa, joissa käytetään sääntöjä $\pm \frac{a}{x} \rightarrow \infty$, kun $x \rightarrow 0$ ja $\pm \frac{a}{x} \rightarrow 0$, kun $x \rightarrow \infty$, tulee olla tarkkana tuloksen merkistä (\pm). Erityisesti on huolehdittava, että raja-arvon olemassa olo edellyttää molempien puoleisten raja-arvojen olevan yhtäsuuret.