Matematiikan propedeuttinen kurssi
Harjoitus 7 vko 45

ke klo 8:15-10 MaD 381
to klo 14:15-16 MaA 210
to klo 18:00-20 MaD 202

1. Tutki milloin seuraavat funktiot ovat jatkuvia:
   a)
   $$f(x) = \begin{cases} 4(x-1), & \text{kun } x \leq 1 \\ -x^2+1, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$
   b)
   $$f(x) = \begin{cases} (x-3)x, & \text{kun } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+\sqrt{3}}, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$$

2. a) Ratkaise ne vakion a arvot, joilla funktio
   $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2a, & \text{kun } x \leq 2 \\ x^3, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$$
   on kaikkialla jatkuva.

   b) Mikä ehto vakion b on täytettävä, jotta funktio $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - b}$ olisi epäjatkuva kohdissa $x = 2$ ja $x = -2$.

3. Osoita Bolzanon lauseen avulla, että funktiolla $f(x) = x^4 + x^3 - 2x - 4$ on ainakin yksi juuri. Osoita lisäksi, että funktion $f(x) = |x^4 + x^3 - 2x - 4|$ pienin arvo on nolla.

4. Laske erotusosamäärän raja–arvon avulla seuraaville funktioille derivaatat kohtaan $x = 1$.
   a) $f(x) = \dfrac{x-3}{2x}$
   b) $f(x) = (x^2-1)\sqrt{x}$

5. Derivoi seuraavat funktiot,
   $$\text{a) } f-g \quad \text{b) } fg \quad \text{c) } \frac{f}{g} \quad \text{d) } f(g) \quad \text{e) } f(h) \quad \text{f) } h(g)$$
   kun tunnetaan $f(x) = 2x^2 + 3x$, $g(x) = 2 - 5x$ ja $h(x) = e^x$.

   Vihje: Tutki ensin derivoimissääntöjä. Aina ei välttämättä ole helpointa lähteä sijoittamaan kaikkia tietoja paikalleen ja laskea vasta sitten derivaatta.

6. Derivoi (opettele käyttämään derivointi sääntöjä ja kaavoja)
   a) $f(x) = 2x^4 - 5x + 6$ b) $f(x) = (x+3)(2x^3 + x)$ c) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$
   d) $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 3x}$ e) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 - 3x}$ f) $f(x) = x(2x+1)^4$

7. Derivoi (opettele käyttämään derivointi sääntöjä ja kaavoja)

a) $f(x) = (4x+2)^2$ b) $f(x) = \sin(2x+1)$ c) $f(x) = \ln(3x+1)$
d) $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ e) $f(x) = \sin^2 x$

8. Milloin seuraavat funktiot ovat aidosti kasvavia (ts. niille laskettujen tangenttien kulmakertoimet ovat positiivisia)?
   a) $f(x) = 2x^2 + 4$
   b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

9. Ratkaise funktion $f : f(x) = x^5 + 6x^2 + 7$ kuvaajalle, kohtaan $x = 1$ piirrettyjen tangenttisuoran ja normaalisuoran yhtälöt.
   HUOM! Tangenttisuora ja normaalisuora leikkaavat toisensa aina kohtisuorasti, jolloin niiden kulmakertoimien välillä on kohtisuoruus ehto $k_t k_n = -1$.

10. a) Mikä on funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ kuvaajalle kohtaan $x = -1$ piirretyn tangenttisuoran suuntakulma?
    b) Määritä vakio b siten, että funktiot $f(x) = 2x^2 + 4$ ja $g(x) = -3x^2 7x + b$ omaavat leikkauspisteessään saman derivaatan arvon. Laske kyseinen derivaatan arvo. Mitä tulos tarkoittaa geometrisesti?

Lisätehtävä: (tästä ei lasketa hyvityksiä kurssiin) l'Hospitalin sääntö

l'Hospitalin sääntö on tarpeen monimutkaisissa raja-arvolaskuissa, lisäksi se nopeuttaa raja-arvolaskujen laskemista (vältytään ikäviltä tekijöiden supistamista yms.) Sitä tullaan soveltamaan mm. kansantaloustieteen kursseilla raja–arvolaskujen yhteydessä.

Teoria: Olkoon raja–arvoja laskettaessa funktiona rationaalifunktio $f(x) = \dfrac{q(x)}{h(x)}$, jonka raja–arvo kohtaan $x = x_0$ laskettuna on muotoa "$\frac{0}{0}$"tai "$\frac{\infty}{\infty}$"ja funktiot $q(x)$ sekä $h(x)$ ovat tarkasteltavalla välillä sekä jatkuvia, että derivoituvia. Silloin voidaan differentiaalilaskennan väliarvolauseen perusteella johtaa niin kutsuttu l'Hospitalin sääntö:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{q(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{q'(x)}{h'(x)}$$

Toisinaan sääntöä voi joutua käyttämään useamman kerran peräkkäin.

Tehtävä: Laske l'Hospitalin säännön avulla seuraavat raja–arvot.

1. $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$$

2. $$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x-1}{1+e^x}$$