

Matematiikan propedeuttinen kurssi
Harjoitus 8 vko 46

ke klo 8:15-10 MaD 381
to klo 14:15-16 MaA 210
to klo 18:00-20 MaD 202

1. a) Tutki onko funktio $f(x) = |x^3 - x^2|$ derivoituva kohdassa $x = 1$.
b) Osoita että funktiolla $f(x) = x|x|$ on derivaatta kohdassa $x = 0$.
2. Millä vakion a arvolla funktio f :

$$f(x) = \begin{cases} a(3x - 2), & \text{kun } x < a \\ x^2 + 2x, & \text{kun } x \geq a \end{cases}$$

on a) jatkuva b) derivoituva?

3. Ratkaise seuraavien funktioiden lokaalit ja absoluuttiset ääriarvokohdat. Tutki myös milloin kyseiset funktiot ovat aidosti kasvavia.

a) $f(x) = x^5 + 6x^3 - 2$

b) $f(x) = 1 + |x - 1|$

c) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

4. Ratkaise seuraavien funktioiden lokaalit ja absoluuttiset ääriarvot. Tutki myös milloin kyseiset funktiot ovat aidosti väheneviä.

a) $f(x) = x^4 - 8x + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 3x + 6$

c) $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$

5. a) Ratkaise funktioiden g ja h kuvaajien asymptootit, kun $g(x) = \frac{2}{x+4}$ ja

$$h(x) = \frac{2x^2}{x+4}.$$

- b) Piirrä funktion $f(x) = \frac{1-3x^2}{x-2x^2}$ kuvaaja.

6. a) Ratkaise funktioiden g ja h kuvaajien asymptootit, kun $g(x) = \frac{2}{x^2-4}$ ja

$$h(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}.$$

- b) Piirrä funktion $f(x) = \frac{x^3+1}{x}$ kuvaaja.

7. Mäen rinteiden profiilikäyrä välillä $0 \leq x \leq 72$ on

$$y = \frac{1}{7776}x^3 - \frac{1}{72}x^2 + 24,$$

kun yksikkönä on metri. Missä pisteessä rinne on jyrkimmin laskeva ja mikä on kaltevuuskulma tässä kohtaa?

8. a) Tehtaassa ryhdytään valmistamaan kannetonta litran vetoista suorakulmaisen särmiön muotoista peltiastiaa, jonka pohjana on neliö. Kuinka suureksi on valittava astian korkeuden ja pohjan särmän suhde, jotta peltiä kuluisi mahdollisimman vähän?

b) Teollisuus robootti voidaan säätää valmistamaan 200-700 koneen osaa tunnissa. Tuotannossa syntyvien virheellisten osien prosentuaalinen osuus on suoraan verrannollinen valmistusnopeuteen. Nopeudella 200 kpl/h on virheellisiä 20 %. Millä valmistusnopeudella robotti tuottaa eniten virheettömiä osia? **Vihje:** laske ensin kunka paljon virheellisiä osia tuotetaan tunnissa ja sitten kuinka paljon virheettömiä, minkä jälkeen voit tutkia virheettömien määrän ääriarvoja.

9. a) Onko funktiolla $f(x) = x + \cos^2 x$ ääriarvoja?

b) Kun erästä tuotetta, jonka hankinta hinta on 50 euroa myydään 80 euron hinnalla, on päivämyynti 60 kappaletta. Hinnan laskemisen oletetaan vaikuttavan siten, että yhden euron alennus lisää aina menekkiä viidellä kappaleella. Millä kokonaisuksi euroiksi pyöristetyllä myyntihinnalla saadaan tällöin suurin kate? (kate = myyntihinta - hankintahinta)

10. Päättele/arvaa kaksi funktiota, joiden molempien derivaattafunktio on

a) $f'(x) = 2x + 1$

b) $g'(x) = 4x^3 - 6x$

c) $h'(x) = 2x(2x^2 - 4)^3$

d) $q'(x) = \frac{-4x}{(2x^2 - 3)^2}$

Tarkista derivoimalla, että vastaukset ovat oikein.

Muistutus: matematiikan yleisopintojen nettisivuilta löydät havainnolituksia analyysin asioihin osoitteesta:

www.math.jyu.fi/ylemat/opintojen_tueksi/havainnolituksia/analyysi/

Kokeessa annettavat kaavat löydät osoitteesta:

www.math.jyu.fi/ylemat/opetusmateriaalia/propedeuttinen_kurssi/kaavoja.pdf