

Problèmes inverses, cours Jussieu 2013.

① Rappels: (Taylor [1], Gallot-Hulin-Lafontaine).

- Variétés: M équipée d'un atlas (U_j, φ_j)
avec $\varphi_j: U_j \rightarrow V_j \subset \mathbb{R}^n$ homéos tels que $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$
sont des C^∞ diff'os. Variétés à bords: remplacer $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{R}_+^n = \{x_n \geq 0\}$.
- métrique: $g \in C^\infty(M, S_+^{1,2} T^*M)$ section en fibre des tenseurs
symétriques de degré 2, g définie positive en tout point.
en coordonnées $x_1, \dots, x_n$,
$$g = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j$$

- différentielle extérieure: $d: C^\infty(M, \Lambda^p T^*M) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^{p+1} T^*M)$
$$dw(x_1, \dots, x_{p+1}) = \sum_i (-1)^i x_i (w(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p))$$

$$+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} w([x_i, x_j], x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p)$$

$\rightarrow$ pour une 1-forme: $dw(x_1, x_2) = x_1 w(x_2) - x_2 w(x_1) - w([x_1, x_2])$

$\rightarrow$ en coordonnées:
$$d(a(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p})$$

$$= \sum_{\substack{j \neq i_k \\ k=1, \dots, p}} \partial_{x_j} a(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Propriétés: 1) $d \circ d = 0$

2) Stokes: si M ouverte à bords,
$$\int_M dw = \int_{\partial M} w$$

si $w \in C^\infty(M, \Lambda^{n-1} T^*M)$.

3) Formes fermées/exactes: $dw = 0 \Leftrightarrow w$ fermée
 $w = dx \Leftrightarrow w$ exacte.
cohomologie de De Rham: $H^p(M) = \text{Ker } d_p / \text{Im } d_{p-1}$ sur Λ^p

4) Lemme de Poincaré: sur un ouvert simplement connexe Ω ,
$$dw = 0 \Rightarrow w \text{ exacte}$$

• Hodge *: Si g métrique Riemannienne, $\text{vol}_g \in C^\infty(M, \Lambda^n M)$
est la forme volume définie par: Si $(x_1, \dots, x_n)$ coordonnées
locale,
$$\text{vol}_g = \sqrt{\det g} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Exemple: Ceci définit bien une forme différentielle sur M , ~~non nulle~~
qui ne s'annule pas si M est orientée.

Sur $\Lambda^k T^*M$ on a un produit scalaire induit par M ,

$$\langle N_1 \wedge \dots \wedge N_k, w_1 \wedge \dots \wedge w_k \rangle_g = \sum_{\pi \text{ perm. de } \{1, \dots, k\}} (\text{Signe } \pi) \langle N_1, w_{\pi(1)} \rangle \dots \langle N_k, w_{\pi(k)} \rangle$$

$$*(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}) = \text{sign}(\pi) e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{n-k}}$$

Soit $\{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}$
 $= \{1, \dots, n\}$
 π permutation

* est défini par

$$u \wedge *v = \langle u, v \rangle_g \text{ dvol}_g$$

$$*: C^\infty(M, \Lambda^k T^*M) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^{n-k} T^*M) \text{ et}$$

$$** = (-1)^{k(n-k)} \text{Id}$$

• Codifférentielle: $w := (-1)^k \text{ sur } \Lambda^k T^*M$, $\bar{w} := (-1)^{k(n-k)} \text{ sur } \Lambda^k$

(pour M sans bord)

$$\begin{aligned} \langle du, v \rangle_L &= \int_M du \wedge *v = \int_M d(u \wedge *v) + u \wedge d*v(v) \\ &= \int_M u \wedge * \bar{w} * d*v(v) = \langle u, \bar{w} * d*v(v) \rangle_L \end{aligned}$$

$$\text{donc } S = d^* = \bar{w} * d * w = \boxed{(-1)^{k(n-k) - n + k - 1} * d *}$$

propriété: $S \circ S = 0$.

• Laplacien: $\Delta_g: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$
 $f \mapsto d^*d = Sd$.

(et sur les formes $\Delta = d^*d + dd^*: C^\infty(M, \Lambda^k) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^k)$)

en coordonnées: $\Delta_g f(x) = -\frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} \sum_{ij} \partial_{x_i} (\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_{x_j} f)(x)$

$$= - \sum_{ij} g^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f + \text{termes d'ordre } \leq 1$$

propriétés: IPP:

$$\begin{aligned} \langle \Delta f_1, f_2 \rangle_L &= \langle d^*d f_1, f_2 \rangle_L \\ &= \langle d f_1, d f_2 \rangle_L = \langle f_1, \Delta f_2 \rangle_L \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Delta$ formellement auto-adjoint

Energie: $\langle \Delta f, f \rangle = \int_M |df|_g^2 \text{ dvol}_g$

• Formule de Green : M à bord ∂M

$$\langle \Delta f_1, f_2 \rangle_{L^2} - \langle f_1, \Delta f_2 \rangle_{L^2} = \int_{\partial M} (-\partial_\nu f_1 \cdot f_2 + \partial_\nu f_2 \cdot f_1) d\text{vol}_g$$



où ∂_ν est la normale extérieure pour g et $d\text{vol}_g = i^* d\text{vol}_g$ si $i: \partial M \rightarrow M$,

• Espaces de Sobolev : [dans $\mathbb{R}^n$], $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, s'zo, si $u \in L^2$ et
 $\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$ ou $\langle \xi \rangle^s \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
 si $s = k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \partial^\alpha u \in L^2$ $\forall \alpha, |\alpha| \leq k$
 pour $s < 0$, de même, $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, $\langle \xi \rangle^s \hat{u} \in L^2$.
 norme de Hilbert: $\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$

propriétés : 1) si $s > \frac{n}{2}$ $[u \in H^s \Rightarrow u \in C^0 \cap L^\infty]$

car $u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{e^{ix\xi}}_{\in L^2} \underbrace{\langle \xi \rangle^{-s} \hat{u}(\xi)}_{\in L^2} d\xi$ (convergence dominée)

2) restriction: $\tau: \begin{cases} H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u \rightarrow u|_{x_n=0} \end{cases}$ ($s > \frac{1}{2}$)

preuve: en effet: $\hat{f}(\xi') = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) d\xi_n$ si $\tau u = f$.
 donc $|\hat{f}(\xi')|^2 \leq \left(\int |\hat{u}(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2s} d\xi_n \right) \left(\int \langle \xi \rangle^{-2s} d\xi_n \right)$
 ou $\int (1 + |\xi'|^2 + \xi_n^2)^{-s} d\xi_n = C_s (1 + |\xi'|^2)^{-s+\frac{1}{2}}$ si $(s > \frac{1}{2})$

[sur M compact] : $u \in H^s(M) \Leftrightarrow \forall \varphi \in C_0^\infty(M)$ supportée dans une carte $U \subset \mathbb{R}^n$
 $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$

[Domaines à bord] : Ω à bord C^∞ .

on définit $H^s(\Omega) = H^s(\mathbb{R}^n) / \{u \in H^s(\mathbb{R}^n), u|_\Omega = 0\}$

si $s = k \geq 0$ $H^k(\Omega) = \text{Im}(\rho: H^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow D(\mathbb{R}^n))$
 où ρ est la restriction

pour une variété à bord M on étend M en $\tilde{M}$ compacte sans bord ($\tilde{M} = M \cup M$ par exemple).

• Injection compacte de Sobolev :

S: M compacte $\hookrightarrow H^1(M) \hookrightarrow L^2(M)$ compact $\hookrightarrow L^2(M)$

$$\int_M |u|^2 d\mu_g + \int_M |du|^2 d\mu_g = \|u\|_{H^1}^2 \quad \text{est une norme pour } H^1(M), \text{ qui en fait un Hilbert}$$

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_L + \langle du, dv \rangle_{L^2}$$

on utilise un recouvrement de M par $(U_j)_{j=1, \dots, J}$, une partition de l'unité $1 = \sum_{j=1}^J \psi_j$, chaque U_j est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et peut-être vu comme un ouvert de $T^n = (\mathbb{R}^n / \mathbb{Z})^n$ en écriv. $u = \sum_j \psi_j u$, on est ramené à montrer

que $H^1(T^n) \hookrightarrow L^2(T^n)$ est compact.
 $u \mapsto u \psi_j$

car $|du|_g$ est compatible à $|du|_{\mathbb{R}^n}$

en utilisant les séries de Fourier : $u(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \hat{u}_m \frac{e^{im \cdot x \frac{2\pi}{L}}}{L^{n/2}}$

$$\text{on a que } \|u\|_{H^1(T^n)}^2 = \sum_m |\hat{u}_m|^2 (1 + (\frac{2\pi}{L})^2 |m|^2)$$

$$H^1(T^n) = \Lambda^{-1}(L^2(T^n)) \quad \text{car } \Lambda : u \mapsto \sum_m \langle \frac{2\pi}{L} m \rangle^{-1} \hat{u}_m$$

$$\text{or } \Lambda^{-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_N^{-1} \quad \text{car } \Lambda_N^{-1} : u \mapsto \sum_{|m| \leq N} \frac{\hat{u}_m}{\langle \frac{2\pi}{L} m \rangle^{-1}} \quad \text{de long}$$

et argumenter montrer que Λ^{-s} est c.p.c. si $s > 0$.

Conclusion $H^1(M) \hookrightarrow L^2(M)$ c.p.c.

• Resolvente : on cherche à résoudre $(\Delta + 1)u = F$

avec $F \in H^{-1}(M)$, $u \in H^1(M)$.

au sens faible cela donne

$$\langle (\Delta + 1)u, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H^1(M)$$

$$\langle du, d\varphi \rangle + \langle u, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle$$

$$\langle u, \varphi \rangle_{H^1} = \langle F, \varphi \rangle$$

$|\langle F, \varphi \rangle| \leq \|F\|_{H^{-1}} \|\varphi\|_{H^1}$ est continue sur $H^1(M)$, donc par

le théorème de représentation de Riesz, $\exists ! v$ tq $v \in H^1$ et

$$\langle v, \varphi \rangle_{H^1} = \langle F, \varphi \rangle \quad \text{i.e.}$$

$$\langle dv, d\varphi \rangle_{L^2} + \langle v, \varphi \rangle_L = \langle F, \varphi \rangle$$

et l'application $R(-1) := \begin{cases} H^{-2}(m) \rightarrow H^1(m) \\ F \mapsto u \end{cases}$ vérifie $\|R(-1)F\|_{H^1} \leq \|F\|_{H^2}$
 donc bornée, de plus $\forall \varphi \in H^1$

$$\langle dR(-1)F, d\varphi \rangle + \langle R(-1)F, \varphi \rangle = F(\varphi)$$

donc $\langle (\Delta+1)R(-1)F, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C^\infty(m)$

$$(\Delta+1)R(-1) = \text{Id sur } H^1(m)$$

$R(-1)$ inverse à gauche de $(\Delta+1) : H^1(m) \rightarrow H^{-2}(m)$

$R(-1) : L^2(m) \rightarrow H^1(m) \hookrightarrow L^2(m)$ est compact et auto-adjoint

car $\langle R(-1)f, h \rangle = \langle u, (\Delta+1)R(-1)h \rangle_{L^2} = \langle u, R(-1)h \rangle_{H^1(m)} \quad \text{si } f, h \in C^\infty$
 $= \langle du, dR(-1)h \rangle_{L^2} + \langle u, R(-1)h \rangle_{L^2}$
 $= \langle (\Delta+1)u, R(-1)h \rangle = \langle f, R(-1)h \rangle \quad \text{si } f, h \in C^\infty$

et $\langle R(-1)f, f \rangle_{L^2} = \langle R(-1)f, (\Delta+1)R(-1)f \rangle_{L^2} = \|dR(-1)f\|_{L^2}^2 \geq 0$
 $\geq \|R(-1)f\|_{L^2}^2 \geq 0$ si $f \in L^2$

de +, si $R(-1)f = 0$, $(\Delta+1)R(-1)f = f = 0$ au sens faible
 donc $f = 0$ Ker $R(-1) = 0$

[T_h : un opérateur auto-adjoint compact injectif sur $L^2(m)$ admet une base orthonormée $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de L^2 tq $K\psi_j = \lambda_j \psi_j$ et $\lambda_j > 0$ si $K \geq 0$]

donc il existe $\varphi_j \in H^1$ tq $R(-1)\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$ et on a

$$(\Delta+1)R(-1)\varphi_j = \varphi_j = \lambda_j (\Delta+1)\varphi_j \quad \text{au sens faible (ds } H^1)$$

$$\Delta \varphi_j = \left(\frac{1}{\lambda_j} - 1 \right) \varphi_j = s_j \varphi_j$$

notons que $\|R(-1)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq 1$ donc $0 \leq \lambda_j \leq 1$ et

si $R(-1)f = f$ alors $f = (\Delta+1)f \Rightarrow \Delta f = 0 \Rightarrow df = 0$
 de L^2

donc $\lambda_0 = 1$ de multiplicité 1.

$\Rightarrow f = \text{cste}$

Conclusion: $\exists \varphi_j \in H^1(m) \subset L^2$ base orthonormée de L^2 , et $(s_j)_{j \geq 0}$ avec $s_0 = 0$ tq $\Delta \varphi_j = s_j \varphi_j$ ($\Delta \varphi_j \in L^2$)

• Espaces de Sobolev sur M: on pose $H^k(m) = \{u \in L^2, \sum_j |\langle u, \varphi_j \rangle|^2 (1+s_j)^{2k} < \infty\}$
 avec la norme $\|u\|_{H^k(m)} = \left(\sum_j (1+s_j)^{2k} |\langle u, \varphi_j \rangle|^2 \right)^{1/2}$

Exercice: Montrer que $H^k(m)$ est bien l'ensemble de $u \in L^2$ tq $\varphi_j u \in H^k(m)$ si φ_j partie de l'unité lisse. et on commence de ∞ par H^{2k}

a Problème de Dirichlet :

M compacte à bord lisse, g métrique
on veut résoudre : (1) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial M} = f \end{cases}$ et (2) $\begin{cases} \Delta u = \varphi \\ u|_{\partial M} = 0 \end{cases}$ $\varphi \in H^1(M)$.
avec $u \in H^1(M)$.

→ on préfère commencer par M compacte sans bord pour résoudre (2) :

on pose : $B(u,v) = \int_M \langle du, dv \rangle_g$
et on a $|B(u,v)| \leq \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \quad \forall u,v \in H_0^1(M)$.

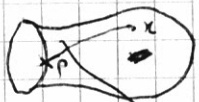
où $H_0^1(M) = \{u \in C_0^\infty(M)\}$

on pose $\Psi(\varphi) := \langle \varphi, \varphi \rangle$ avec $\varphi \in H^1(M)$, $\varphi \in H_0^1(M)$.

où $H^1(M) = \{\varphi : H_0^1(M) \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$
 $= H_0^1(M)^*$

Lemme : inégalité de Poincaré : $\exists C_M > 0$ tq $\int_M |du|^2 \geq C_M \|u\|_{L^2}^2$
 $\forall u \in H_0^1(M)$.

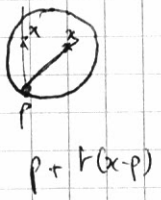
preuve : (domaine)



$$u(x) = \int_{\partial \Omega, x} du$$

donc

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq \left| \int_0^1 du(p + t(x-p)) dt \right|^2 \\ &\leq \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} u(p + t(x-p)) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |du(p + t(x-p))|^2 dt |x-p| \end{aligned}$$



par contradiction :

si $\exists \varepsilon_j > 0, \varepsilon_j \rightarrow 0, \int |du_j|^2 \leq \varepsilon_j \|u_j\|_{L^2}^2$
 $u_j \in H_0^1$

alors si $N_j = \frac{u_j}{\|u_j\|}$ on a $\|du_j\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon_j$

N_j a une sous suite convergente faible H_0^1 , mais $N \in H_0^1$, mais

$\langle du_j, \varphi \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \langle du, \varphi \rangle$ si $\varphi \in C_0^\infty(M)$ donc $du = 0$

$$1 \leq \varepsilon_j \|u_j\| \rightarrow 0$$

donc $N = \text{constante} = 0$
car $N_j \in H_0^1$

⇒ contradiction avec $\|N_j\| = 1$.

donc $H_0^1(M)$ muni de $B(u, v) = \int_M |du|^2$ est un Hilbert, c'est $H_0^1(M)$ muni de la norme $H^1(M)$.

$|Y(\varphi)| \leq \|Y\|_{H^1(M)} \|Y\|_{H_0^1}$ donc par Riesz, $\exists! u \in H_0^1(M)$ tq

$$B(u, Y) = Y(\varphi), \quad c-1-d \quad \int \langle du, d\varphi \rangle = \langle Y, \varphi \rangle_{H^1 \times H_0^1}$$

et donc

$$\Delta u = Y \text{ faiblement}$$

G: $Y \rightarrow u$ est borné de $H^1(M)$ ds $H_0^1(M)$ de norme $\|Y\|_{H_0^1}$

• Problème de Poisson (1) $\forall f \in H^1(M)$, on a que

$$\exists! u \in H^1(M) \text{ tq } \begin{cases} \Delta_g u = 0 \\ u - b_{13m} = 0 \end{cases}$$

preuve: $\Delta f \in H^{-2}(M)$ car $\langle \Delta f, Y \rangle = \langle df, dY \rangle$
on pose $v \in H_0^1(M)$ tq $\Delta v = \Delta f$, alors $u = -v + f$ marche $\square$

• Résolvente: Comme pour le cas c'et sans bord, $\exists R(\lambda): L^2 \rightarrow H_0^1 \rightarrow L^2$
compact tel que $\Delta_g R(\lambda) = \text{Id}$ sur L^2 .
soit s_j le spectre, $s_j > 0 \forall j$ ($s_j \rightarrow \infty$).

on pose $R(\lambda) = (\Delta_g - \lambda \text{Id})^{-1}$, c'est une famille méromorphe
en λ d'opérateurs bornés sur $L^2(M)$ avec pôles simples en $\lambda = s_j$

on a de plus $\|R(\lambda) \varphi\|_{L^2} \leq \frac{1}{|\text{Im} \lambda|} \|\varphi\|_{L^2}$ etc.

$$d(\lambda) = \det(\lambda, \text{Sp}(s_j))$$

et $\Delta + V \in L^\infty(M)$ est un potentiel, $(\Delta + V)R(\lambda) \in \mathcal{L}(L^2)$

$$\text{et } (\Delta + V)R(\lambda) \varphi = \text{Id} + \underbrace{K(\lambda)}_{\text{compact sur } L^2(M)}$$

$$\text{et } \|K(\lambda)\| \leq \frac{\|V\|_{L^\infty}}{|\text{Im} \lambda|} < 1 \text{ si } |\text{Im} \lambda| \text{ grand}$$

donc $R_v(\lambda) := R(\lambda) (1 + K(\lambda))^{-1}$ inverse $(\Delta - \lambda + V)$ sur L^2

et est bien défini comme famille méromorphe sur $\mathbb{C}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \exists \text{ famille dérivée } s_j' \in \text{Voisinage}(\mathbb{R}; \|V\|_{L^\infty}) \\ \text{tq } (\Delta - \lambda + V) \text{ a un inverse à droite} \end{array} \right]$$

rem: si $R(\lambda)$ a un pôle, $R_v(\lambda) = \frac{1}{K_0 + \dots + 1 K_n + 0 \dots}$ $\rightarrow$ rang fini

• ~~Dirichlet - Neumann~~ on peut montrer que $P: H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\partial\Omega)$ est surjectif (il suffit de le faire localement)

Exemple : dans $D \subset \mathbb{C}$, $P(z, \bar{z}) = \frac{1-|z|^2}{|z-\bar{z}|^2}$ noyau de Poisson
 $u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} P(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) d\zeta$ est harmonique avec $u|_{\partial D} = f$.

• Opérateur Dirichlet-Neumann : $p: H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ est surjectif (à vérifier localement, utiliser par ex. ~~la~~ ~~fonction~~ ~~constante~~)

~~par exemple pour $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ on a $u(x', x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x' + y', x_n) P(x' + y', x_n) dy'$~~
~~ou $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^{n-1})$ et $x_n > 0$, $x_n \in \mathbb{R}^n$~~
~~on a bien $u(x', x_n) \rightarrow f(x')$ si $f \in C^0(\mathbb{R}^{n-1})$.~~

Idee : $U_g: H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = (H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*$
 $f \mapsto \partial_n(Pf)|_{\partial\Omega}$

$$Pf \in H^1 \Rightarrow \partial_n Pf \in H^0 = L^2 \Rightarrow \langle \partial_n Pf \rangle \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

en terme d'énergie on a par Green

$$0 = \langle \Delta(Pf), Pf \rangle$$

formel (G) $0 = \int_{\Omega} \Delta(Pf) Pf = \int_{\Omega} \partial_m(Pf) \cdot \partial_m(Pf) + \int_{\partial\Omega} \partial_n(Pf) Pf$ normale ext.

donc $\langle U_g(f), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \langle \partial(Pf), \partial(P\varphi) \rangle$

Def on pose $U_g: H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ tel que

$$\langle U_g f, \varphi \rangle := \int_{\Omega} \langle \partial(Pf), \partial(P\varphi) \rangle_g \quad \forall f, \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

opérateur DN

ans : $\langle U_g f, \varphi \rangle = \langle U_g \varphi, f \rangle$ si $f, \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

(G) fait sens

$$\langle \Delta u, v \rangle = \int_{\Omega} \langle \partial u, \partial v \rangle - \int_{\partial\Omega} \partial_n u \cdot v$$

Si $u, v \in C^\infty$ donc par passage à la limite ça reste vrai si $u \in H^1, v \in H^1$

(2) Dimension 2 :

(1) coordonnées Bochner :

Si $g = \sum_{i,j=1,2} g_{ij} dx_i dx_j$ poséf, $\exists \psi: V_p \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$

tel que $\tilde{g} = \psi^* g = e^{2\psi} (dx^2 + dy^2)$

preuve : on observe que $\Delta \tilde{g} = e^{-2\psi} \Delta_{\text{euc}}$ donc

$$\Delta \tilde{g} x = \Delta \tilde{g} y = 0$$

de plus

$$\tilde{g}(\partial_x, \partial_y) = 0$$

$$\psi(x_1, x_2) = (x(x_1, x_2), y(x_1, x_2))$$

Notat $\frac{1}{2}$ en dimension 2

$$(\text{on a } *d *dx = 0) \text{ et}$$

$$*dx = dy \text{ et } *dy = -dx$$

soit donc

$x: V_p \rightarrow \Omega$ harmonique par $\Delta \tilde{g}$ et avec $dx_p \neq 0$ alors on peut trouver t_0 $dy = *dx$ (lemme de Poincaré)

on aura $*d *dy = *ddx = 0$

et $\psi = (x, y)$ difféo local près de p .

par ex. on prend le pb de Dirichlet/Poisson avec

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ sur } D(p, \epsilon) \text{ avec } u|_{\partial D(p, \epsilon)} = f \\ \text{on identifie } V_p &\text{ à } D(0, 1) \end{aligned}$$

$$\text{on identifie } (x_1, x_2) \mapsto \psi(x_1, x_2) \in D(0, \epsilon)$$

$$g_\epsilon = \psi_\epsilon^* g = \sum g_{ij}(x) \epsilon^2 dx_i dx_j \text{ sur } V_p^\epsilon$$

$$\epsilon^2 \Delta_{g_\epsilon} f(x) = \sum_{i,j} g^{ij}(\epsilon x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} f(x) + \epsilon \sum_{j=1,2} b_j(\epsilon x) \partial_{x_j} f(x)$$

$$\text{on résout } \Delta_{g_\epsilon} f_\epsilon = 0 \text{ avec } f_\epsilon|_{\partial V_p^\epsilon} = x_1$$

$$\epsilon^2 \Delta_{g_\epsilon} f_\epsilon = \epsilon b_1(\epsilon x)$$

donc

$$f_\epsilon(x) = x_1 - \epsilon v_\epsilon$$

$$\begin{cases} \Delta_{g_\epsilon} v_\epsilon = b_1(\epsilon x) \\ v_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial V_p^\epsilon \end{cases}$$

$$\| \partial_x b_1(\epsilon x) \|_{L^2(D(0,1))} \leq C \epsilon^{k_1}$$

donc

$$\| v_\epsilon \|_{H^2(D)} \leq C$$

$$C \geq \| (1 + \Delta_{g_\epsilon})^{-1} \|_{L^2} \geq \frac{1}{C} \| (1 + \Delta_{g_\epsilon})^{-1} v_\epsilon \|$$

$$(1 + \Delta_{g_0}^2)^2 ?$$

$$\Delta_{g_0} = \Delta_{g_0} + \epsilon E$$

$p \in \text{Diff}^2$
unif borné
ou dérivée.

$$(1 + \Delta_{g_0}^2) = (1 + \Delta_{g_0}^2) + \epsilon Q_\epsilon \quad Q_\epsilon \in \text{Diff}^4_{\text{unif}}$$

$$\|Q_\epsilon \theta\|_{L^2}^4 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \partial_x^k \theta \right\|_{L^2}^4$$

$$\leq C \sum \|\partial_x^k \theta\|_{L^2}^4$$

$$\|\partial_x^k \theta\|_{L^2}^2 = \|\xi^k \hat{\theta}\|_{L^2}^2 \Rightarrow \|Q_\epsilon \theta\|_{L^2}^2 \leq C (1 + \epsilon^2)^2$$

donc $\|(1 + \Delta_{g_0})\theta\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{2} \|(1 + \Delta_{g_0})\theta\|_{L^2}^2$
si ϵ petit $\square$

Corollaire

$\exists$ atlas

$$(U_j, \varphi_j)$$

$$\varphi_j: U_j \rightarrow \mathbb{C}$$

et $(\varphi_j)_* g = e^{2\varphi_j} (dx^2 + dy^2)$

et $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$

soit

$$\varphi_{ij}^* (dx^2 + dy^2) = e^{2\varphi_{ij}} (dx^2 + dy^2)$$

$\Leftrightarrow \varphi_{ij}$ est holomorphe ou antiholomorphe.

Conforme + orienté
 $(\Rightarrow)$ holo

en effet si φ conforme :

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$$

$$\begin{cases} \|d\varphi_1\|^2 = \|d\varphi_2\|^2 \\ \langle d\varphi_1, d\varphi_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

si $\det(d\varphi) > 0$ on a

$$d\varphi_2 = *d\varphi_1$$

$$\begin{pmatrix} \partial_x \varphi_2 \\ \partial_y \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_y \varphi_1 \\ \partial_x \varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} (\varphi_1 + i\varphi_2) &= (\partial_x + i\partial_y) \varphi \\ &= (\partial_x \varphi_1 - \partial_y \varphi_2) + i(\partial_y \varphi_1 + \partial_x \varphi_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Structure de variété complexe

pour (M, g)

$\hookrightarrow$ surface de Riemann.

opérateur $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$:

$$\mathbb{C} T^*M$$

Complexifié

$$(T^*M)^{0,1}$$

$$= \mathbb{C} d\bar{z}$$

$$= \text{span } d\bar{z}$$

$$(T^*M)^{1,0}$$

$$= \mathbb{C} dz$$

$$= \text{span } (dz)$$

$*$ = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base (dx, dy)

Valence propres $\pm i$, eigne propre

$$dx + i dy = dz$$

$$\text{pour } \text{Ker}(x + i\mathbb{R})$$

$$dx - i dy = d\bar{z} = \text{Ker}(x - i\mathbb{R})$$

$$\pi^{0,1} : \mathbb{C} T^*M \rightarrow \mathbb{C} d\bar{z}$$

projecté

$$a dx + b dy \rightarrow \frac{1}{2}(a + ib) d\bar{z}$$

on pose $\bar{\partial} = \pi^{0,1} \circ d$ et $\partial = \pi^{1,0} \circ d$

en coordonnées

$$\bar{\partial} f = \partial_{\bar{z}} f d\bar{z}$$

$$\partial f = \partial_z f dz$$

et $\bar{\partial}(u dz + v d\bar{z}) = \bar{\partial}u dz$, $\partial(u dz + v d\bar{z}) = \partial u dz$, $d = \partial + \bar{\partial}$
 Def f holo si $\bar{\partial}f = 0$, ie $f \in \mathcal{H}_f^2$ holo sur $\mathbb{C}$.

rem: ① $\Delta \operatorname{Re}(f) = 0 = \Delta \operatorname{Im}(f)$ (coord. locale).

$$\textcircled{2} \quad \Delta = - * d * d = - * (\partial + \bar{\partial}) * (\partial + \bar{\partial}) = - * \partial * \bar{\partial} - * \bar{\partial} * \partial$$

$$= * (-i \partial \bar{\partial} + i \bar{\partial} \partial) = i * (\partial \bar{\partial} - \bar{\partial} \partial)$$

$$* dz = -i d\bar{z}$$

$$\text{or } \partial \bar{\partial} f = \partial_{\bar{z}} \partial_z f dz \wedge d\bar{z} \text{ et } \bar{\partial} \partial f = \partial_{\bar{z}} \partial_z f d\bar{z} \wedge dz = -\partial \bar{\partial} f.$$

$$\Delta = 2i * \partial \bar{\partial} = -2i * \bar{\partial} \partial.$$

• Uniformité de Riemann: Ω à bord lisse

$$[H: \exists \gamma: \Omega \rightarrow D(0,1) \text{ bi-holomorphe ds } \bar{\Omega}].$$

preuve. on résout $\begin{cases} \Delta G_0 = 0 \\ G_0|_{\partial\Omega} = -\log|z-p| \end{cases} \quad p \in \bar{\Omega}$

alors $G = G_0 + \log|z-p|$ est harmonique ds $\Omega \setminus \{p\}$ et $G|_{\partial\Omega} = 0$

soit H_0 le conjugué harmonique
 $* dG_0 = dH_0$

donc $\partial_{\bar{z}}(G_0 + iH_0) = 0$.

et on pose $H = \operatorname{Im} \log(z-p) + H_0$.

$\gamma = e^{G+iH}$ est bien défini et holo ds Ω ,

" $(z-p)e^{G_0+iH_0}$ s'annule uniquement en p .

$\gamma(\partial\Omega) \subset S^1$ et par principe du maximum.

$\gamma(\Omega) \subset D(0,1)$.

On veut que $\partial\gamma \neq 0 \Leftrightarrow \gamma$ bi-holo.

Principe de l'argument $\#(\gamma^{-1}(q))$ ne dépend pas de q
 avec multiplicité

Si $q \notin \gamma(\partial\Omega) = \delta$
 et est égal à $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{\gamma'(z)}{\gamma(z)} = \operatorname{Ind}_{\gamma}$



Apr

Principe du maximum fort: si u est harmonique, $u|_{\partial\Omega} = 0$
 alors le max est atteint sur $\partial\Omega$ et si il est atteint
 en $p \in \bar{\Omega}$ alors u est constante.

on applique à G sur $D(0,1) \setminus D(p,\epsilon) \rightarrow G < 0$ ds $D(0,1)$
 et donne $\dots$

Fonction de Green (pour le problème de Dirichlet) $\Delta = -\partial_r^2 - \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_\theta$

(1) d'abord sur $\mathbb{R}^2$, $\Delta : \underbrace{\Delta \frac{1}{2\pi} \log|z|}_E = \delta_0$ (calcul facile)
(remarque: $\Delta = -\partial_z \partial_{\bar{z}}$) (potentiel + JPP)

donc $\Delta(E * f) = f$ si $f \in L^2_{\text{comp}} \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$.

on voit que $E \in L^1_{\text{loc}}$ donc $\forall x \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

$\underbrace{(xE)}_{L^1} * \underbrace{f}_{L^2} \in L^2$ (continue sur L^2).

Si $f \in L^2_{\text{comp}}$, $G_0 = E(z-z') \in \mathcal{E}'_{\text{loc}}$

on a $\chi_1 G_0 \chi_2 \in L^1$ $\chi_1 = 1$ sur $\text{supp } \chi_2$

$$\Delta \chi_1 G_0 \chi_2 f = \chi_2 f + [\Delta, \chi_1] G_0 \chi_2 f$$

et $\chi_2 f = f$ si
 $\text{supp}(f) \subset \{x, x_2 = 2\}$.

donc $\Delta \chi_1 G_0 \chi_2 = \chi_2 + [\Delta, \chi_1] G_0 \chi_2$
 $K_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$.

de plus $u = \chi_1 G_0 f \in H^1$ si $f \in L^2$:

car $\hat{u}(\xi) \in C^\infty$ (u a support compact) et $|\xi|^2 \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$
+ Schwartz

donc $\boxed{\chi_1 G_0 \chi_2 : L^2_{\text{loc}} \rightarrow H^2_{\text{comp}}}$

(2) Condition de Dirichlet sur $\mathbb{R}$. dans $H^2 = \{\text{Im } z > 0\}$.

$$G_D(z, z') = {}^* G_0(z - z') = G_0(z - \bar{z}') \quad (z = x + iy)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \log \left(\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{(x-x')^2 + (y+y')^2} \right)$$

on a $G_D(z, z') = 0$ $\text{Im}(z) = 0$ ou $\text{Im}(z') = 0$ ($y=0$ ou $y'=0$)

• on a pour $f \in C_0^\infty$ $\int G_D(z, z) f(z) dz = (E * f)(z) - E * \overline{f \circ \tau}(z)$ $\tau: z \rightarrow \bar{z}$
symétrique

$$\Delta(E * f - E * (f \circ \tau)) = f - f \circ \tau$$

donc si $\text{supp}(f) \subset H^+$, $\Delta G_D f = f$ $\forall C_0^\infty(H^+)$

$$G_D : L^2_{\text{comp}} \rightarrow H^2_{\text{loc}}$$
 par (1).

$$\text{mg } \chi G_D : L^2_{\text{comp}} \rightarrow H^1_0(H^+)$$

$$G_D|_{H^+} : C_0^\infty(H^2) \rightarrow H^1_0(H^2)$$

$$\begin{matrix} f_n \rightarrow f \in L^2 \\ \uparrow \\ C_0^\infty \end{matrix} \rightarrow \underbrace{R_{f_n=0}}_P \circ \chi G_D : L^2 \rightarrow H^1 \rightarrow H^2_{\text{continue}}$$

$$P_{f_n=0}^0 \rightarrow P_R = 0. \quad \square$$

Conclusion : $G_D : L^2_{comp} \rightarrow H^2_{loc} \cap H^1_0$ injectif
 $\Delta G_D = Id$

(3) Sur une surface: carte (U_j, φ_j) $U_j \sim D(0,1)$
 $\text{ou } U_j \sim \{ |z| \leq 1, \text{Im } z > 0 \}$

on pose en a la carte: $g = e^{2\varphi} |dz|^2$

$$\Delta_g = e^{-2\varphi} \partial_z \partial_{\bar{z}} = e^{-2\varphi} \Delta_z$$

on pose $Q_D = \sum_{i \in I_{bl}} \tilde{\chi}_i G_D \chi_i$ ~~$\sum_{i \in I_{sur}} \tilde{\chi}_i G_D \chi_i$~~

$\text{supp}(\tilde{\chi}_i) \subset U_j$ et $\tilde{\chi}_j = 1$ sur $\text{supp } \chi_i$ mesure $e^{2\varphi} dx dy$

$$\Delta_g Q_D = Id + \underbrace{\sum_{i \in I_{bl}} e^{2\varphi} [\Delta \tilde{\chi}_i] G_D \chi_i e^{2\varphi}}_{=: K_D} + \sum \dots$$

mesure: $e^{2\varphi} dx dy$

$$K_D \in C^\infty(\bar{M} \times \bar{M}).$$

on a: $Id + K_D$ Fredholm d'indice nul sur $L^2(M)$

si $(Id + K_D)u = 0$ alors $u \in C^\infty$ et $\Delta_g Q_D u = 0$

mais $Q_D u \in H^1_0$ donc $Q_D u = 0$ par platitude.

or l'inverse de Δ avec

Lemme :

$$Q_D (Id + K_D)^{-1} = R_D(0)$$

conditⁿ de Dirichlet.

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ base de $\text{Ker}(Id + K)$ alors et $\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*$ base de $\text{Ker}(Id + K)^*$
 $\sum \Delta \varphi_i = \varphi_i^*$ et $\Delta \varphi_i = 0$

on pose $\tilde{Q}_D = Q_D + \sum \varphi_i \otimes \varphi_i^*$

$$\Delta \tilde{Q}_D = Q_D Id + K_D + \sum \varphi_i \otimes \varphi_i^*$$

$Id + K_D + \sum \varphi_i \otimes \varphi_i^*$ injectif

on a $(Id + K_D)u = 0$ or $\sum \varphi_i^* \otimes \varphi_i u = 0$

$$(Id + K_D)^{-1} = Id + S_D$$

$$\begin{aligned} S_D + K_D + S_D K_D &= 0 \\ S_D + K_D + K_D S_D &= 0 \\ \Rightarrow S_D &= -K_D + K_D^2 + K_D S_D K_D \end{aligned}$$

~~$S_D, K_D, S_D K_D \in C^\infty(\bar{M} \times \bar{M})$~~

$S_D : \mathcal{E}'(M) \rightarrow C^\infty(\bar{M})$
 $\mathcal{D}'(M)$ dual de $C^\infty_0(M)$
 $\mathcal{E}'(M)$ dual de $C^\infty(M)$

$R_D(0) = Q_D + Q_D S_D$ et $Q_D S_D : \mathcal{E}'(M) \rightarrow C^\infty(M)$

on peut montrer que $Q_D S_D$ a un noyau de Schwartz $C^\infty(\bar{M} \times \bar{M})$

Lemme Op. Hilbert-Schmidt : K compact $H_1 \rightarrow H_2$, H_j Hilbert
 $K^* K$

ou de façon équivalente, $\sum_j \|K_{ij}\|^2 < \infty$ si u_j bon de H_1 .

Lemme (exo) $A \in HS \Leftrightarrow \exists K_A \in L^2(X_1 \times X_2, dp_1 \otimes dp_2)$ tq
 $\downarrow$
 $L^2(X_1, dp_1)$
 $L^2(X_2, dp_2)$
 $\langle Au, v \rangle = \int \langle K_A, v \otimes \bar{u} \rangle$

preuve: (e) bon de $L^2(X_1)$ pose $K_A(x_1, x_2) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle A e_j, f_{x_2} \rangle e_j(x_1)$
 (f) bon de $L^2(X_2)$

noter que $\sum_{j \in \mathbb{N}} |\langle A e_j, f_{x_2} \rangle|^2 < \infty \Leftrightarrow \sum_j \|A e_j\|^2 < \infty$ $\square$

~~Donc $K_0 \in HS(L^2)$, et $HS(L^2) \subset \mathcal{L}(L^2)$ et idéal ds $\mathcal{L}(L^2)$ (clair)~~

Donc $K_0 \in HS(L^2)$, et $HS(L^2) \subset \mathcal{L}(L^2)$ et idéal ds $\mathcal{L}(L^2)$ (clair)
 stable par passage à l'adjoint.

$\Rightarrow K_0 S_0 K_0 \in HS(L^2)$ a un noyau intégral $\chi L^2(M \times M)$,

de m $(1+\Delta)^N K_0 S_0 K_0 (1+\Delta)^N \in HS(L^2) \Rightarrow K \in H^N(M \times M)$

Conclusion: $R_\Delta(z) = Q_0 + T_0$ avec T_0 a noyau intégral $C^\infty(M \times M)$

Propriété: $R_0(0, z, z')$ est harmonique en $z \in M \setminus \{z'\}$

car $\Delta_z \int R_0(0, z, z') \varphi(z') dz'(z') = \varphi(z')$ donc
 $= 0$ hors de $\text{Supp}(\varphi)$.

$\Rightarrow$

$R_0(0, z, z')$ analytique en $z \neq z'$
 dans la carte holomorphe.

o Opérateur de Poisson:

on cherche $\begin{cases} \Delta_0 u = 0 \\ u|_{\partial M} = f \end{cases}$ ($f \in C^\infty$).

Constr. on pose $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ tq $\tilde{f}|_{\partial M} = f$,

on résout $\begin{cases} \Delta_0 v = \Delta_0 \tilde{f} \\ v|_{\partial M} = 0 \end{cases}$ et on pose

$$u = \tilde{f} - v$$

$$\boxed{u = \tilde{f} - R_0 \Delta_0 \tilde{f}}$$

par Green:
 pour $z \in M$

$$\int_M R_0(z, z') \Delta_0 \tilde{f}(z') dz'(z') = \int_M Q_0(z, z') \Delta_0 \tilde{f} + S_0 \Delta_0 \tilde{f}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|z'-z| \geq \epsilon} R_0(z, z') \Delta_0 \tilde{f}(z') - \underbrace{\Delta_0 R_0(z, z')}_=0 \tilde{f}(z)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial \Omega} -\partial_n' R_D(z, z') \cdot f(z') d\omega_{\partial \Omega}(z') + \int_{D(z, \varepsilon)} -\partial_n' R_D(z, z') \cdot f(z') d\omega(z') \right. \\ \left. + \underbrace{\int_{\partial \Omega} \partial_n' \tilde{f}(z) R_D(z, z') d\omega(z')}_{=0} + \int_{D(z, \varepsilon)} \partial_n' \tilde{f} \cdot R_D(z, z') d\omega(z') \right)$$

min
max
extremum



en coord. locale.

$dz^2 + z^2 d\theta^2$

~~z~~

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}(z) + \varepsilon \tilde{f}(z) = \tilde{f}(z)$$

$$\int_{\theta=\varepsilon}^{\theta=2\pi} (\tilde{f}(z) + \varepsilon \tilde{f}(z)) \log(r) r dr d\theta \\ - \int_{\theta=\varepsilon}^{\theta=2\pi} \log(r) r dr d\theta \rightarrow 0$$

donc
$$\boxed{u(z) = \int_{\partial \Omega} +\partial_n' R_D(z, z') \cdot f(z') d\omega_{\partial \Omega}(z')}$$

Forma:
$$-\partial_y G_D(z, z') \Big|_{y=0} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2(y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} - \frac{2(y+y')}{(x-x')^2 + (y+y')^2} \right) \Big|_{y=0}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{-2y}{(x-x')^2 + y^2} - \frac{2y}{(x-x')^2 + y^2} \right) = \left(+\frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + (x-x')^2} \right)$$

$$\boxed{\partial_n' = -e^{i\theta} \partial_y}$$
, $d\omega_{\partial \Omega}(z) = e^{i\theta} dx$

voilà la Poisson-Koe

$$P_D(z, y)$$

a Dirichlet-Neumann:

Wf est la fonction:
$$\boxed{Wf(z) = \partial_n P_D f|_{\partial \Omega}}$$

rema: on voit que $P_D f$ a la régularité de $P_H f$.

$$P_H f = \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{y^2 + (x-x')^2} f(x') dx' = \frac{1}{y} \left(\frac{1}{1 + |x'|^2} * f \right)$$

$$\mathcal{F}(P_H f)(\xi, y) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+|x|^2}\right)(\xi, y) \hat{f}(\xi)$$

on remarque que $K(\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+|x|^2}\right)$ est $C^\infty \cap L^\infty$ et en intégrant pp.
on a $|K(\xi)| \leq C |\xi|^{-N}$ $|\xi| \rightarrow \infty$

$$\text{on } (-\partial_\xi^2 + 1) \hat{f}(\xi) = \hat{1} = 2\pi \delta_0$$

$$\hat{f} \text{ paire} \Rightarrow \hat{f}(\xi) = C e^{-|\xi|} \quad C = \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

donc comme $(\partial_{\xi+1}) \delta_{\xi+1} e^{-|\xi|} = (\partial_{\xi+1}) (-2He^{-\xi})$
 $= -2H' = -2\delta_0$

$$\Rightarrow C = \pi$$

$$\pi e^{-y|\xi|} \hat{f}(\xi) = \pi \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-y)^j}{j!} |\xi|^j \hat{f}(\xi)$$

$\in C^\infty([0,1]_y; L^2 \cap S'(\mathbb{R}^2))$

$$\text{donc } -\partial_y (\pi e^{-y|\xi|} \hat{f}(\xi))|_{y=0} = +\pi |\xi| \hat{f}(\xi)$$

sur $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{N} \hat{f} = |\xi| \hat{f}}$$

$$\mathcal{N} = \sqrt{\Delta'}$$

Le noyau de Schwarz est $+\frac{1}{\pi} |x-x'|^{-2}$ (c'est une distribution pas de L^1_{loc})

pour nous :

$$\frac{e^{-\pi(x-x')^2}}{|x-x'|^2} \text{ par rapport à } dxdy.$$

$$\text{symbole : } e^{-2\pi(x)} |\xi|$$

Dirichlet-to-Neumann est α noyau singulier (op. pseudo différentiel d'ordre 1, elliptique)

Cordon: $\mathcal{N}_\gamma$ détermine P_{DM} , ie la métrique au bord.

[Lemme : $\mathcal{N}_\gamma$ détermine $R_0(0,3,5)$ pour γ, γ' près du bord.]

preuve : si $\mathcal{N}_{\gamma_1} = \mathcal{N}_{\gamma_2}$ sur $\Gamma \subset \partial M$

on a ds un système de coordonnées complexe

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} : U^{(1)} &\rightarrow U \\ \psi^{(2)} : U^{(2)} &\rightarrow U \end{aligned}$$

$$\text{pour } \gamma' \text{ fixe dans } U, \quad \mathcal{F}_{\gamma'}(\psi^{(1)} R_0^{(1)} - \psi^{(2)} R_0^{(2)})(\gamma, \gamma')$$

est harmonique pour Δ_γ dans $U \setminus \{\gamma\}$

ou prolonge par 0 ds $\text{Im } \gamma < 0$, on a une fct⁰ harmonique donc par prolongement unique $\mathcal{F}_{\gamma'} = 0$ dans $U \setminus \{\gamma\}$

□

L

$$\text{On a : dans } \mathbb{R}^2, \quad (-\partial_x^2 - \partial_y^2) u = 0 \quad \Rightarrow \quad (-\partial_y^2 + |\xi|^2) \hat{u}(y, \xi) = 0$$

$$\begin{cases} (\partial_y + |\xi|)(\partial_y - |\xi|) \hat{u}(y, \xi) = 0 \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{f}(\xi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(y, \xi) = \underbrace{e^{-y|\xi|} \hat{f}(\xi)}_{\in C^\infty} \text{ ou } e^{y|\xi|} \hat{f}(\xi)$$

les hautes fréquences sont tuées par $y \gg h$
 $\sim \frac{1}{\sqrt{h}}$

③ Pb de conductivité

soit γ métrique sur T^*M , on pose

$$\Delta_\gamma = \delta_\gamma \delta$$

$$\Rightarrow \text{dans } \mathbb{R}^n \quad \Delta_\gamma u = -\operatorname{div}(\gamma \nabla u).$$

Def: Si γ fonde, ie $\gamma = \gamma(x) \operatorname{Id}$, on dit que γ est isotropes.

Lemme: le pb de Dirichlet $\begin{cases} \Delta_\gamma u = 0 \\ u|_{\partial M} = f \end{cases}$ a une seule unique.
preuve: comme avant, pour Δ_γ

Def on définit Dirichlet et Neumann:

$$\mathcal{W}_\gamma: H^{\frac{1}{2}}(\partial M) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial M)$$

Lemme: si γ isotrope, on a $\begin{cases} f \rightarrow \langle \gamma \nabla u, \partial n \rangle \\ \text{ou } f \rightarrow \delta(u)(\partial n) \end{cases}$
 $\mathcal{W}_\gamma = \gamma^{\frac{1}{2}} \mathcal{W}_V \gamma^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \Delta \gamma \operatorname{Id}$ ou $V = -\frac{\Delta \gamma}{\gamma}$ et $\mathcal{W}_V$ DN pour $(\Delta + V)$.

preuve:
$$\begin{aligned} \Delta_\gamma (u) &= -\operatorname{div}(\gamma \nabla u) = -\nabla \gamma \cdot \nabla u + \gamma \Delta u \\ &= \gamma (\Delta u - \nabla(\log \gamma) \cdot \nabla u) \\ &= \gamma \left(e^{\frac{1}{2} \log \gamma} \Delta \left(e^{\frac{1}{2} \log \gamma} u \right) - u \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ les solut de $\Delta_\gamma u = 0$ sont solut de $(\Delta + V)(\sqrt{\gamma} u) = 0$ avec $V = -\frac{\Delta \gamma}{\gamma} = -\Delta(e^{\frac{1}{2} \log \gamma})$

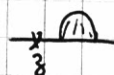
$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\gamma f &= \delta \partial_n u|_{\partial M} = \delta \partial_n \left(\frac{u}{\sqrt{\gamma}} \right)|_{\partial M} \text{ ou } w = \sqrt{\gamma} u. \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\Delta \gamma}{\gamma} w|_{\partial M} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_n w|_{\partial M} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \mathcal{W}_V(\sqrt{\gamma} f) - \frac{1}{2} f \cdot \partial_n \gamma. \end{aligned}$$

$\partial_n R_0^{(1)}(z, z') = \partial_n R_0^{(2)}(z, z')$?
 $z \in M, z' \in M \quad z \neq z'$

on pose $\psi_z(z') = (\partial_n R_0^{(1)} - \partial_n R_0^{(2)})(z, z')$ alors $\Delta_z \psi_z(z') = 0$ dans $M \setminus \{z\}$.

$\psi_z|_{\partial M \setminus \{z\}} = 0$ et $\partial_n \psi_z|_{\partial M \setminus \{z\}} = 0 = (W^1 - W^2)(z, z')$

donc $\psi_z(z) = 0$ ds $M \setminus \{z\}$



(1) Montrons que $\exists c > 0$, (S: $K_{\Delta}(\Delta+v) = 0$)

$$\|(\Delta+v)u\|_{L^2}^2 \geq c (\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|du\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2) = c \|u\|_{H^2}^2, \quad \forall u \in H_0^2(\Omega)$$

on a $\|\Delta u\|_{L^2}^2 = \langle \Delta^2 u, u \rangle \geq \begin{cases} \lambda_1^2 \|u\|_{L^2}^2 \\ \lambda_1 \|du\|_{L^2}^2 \end{cases}, \quad \forall u \in H_0^2$

on $\lambda_1 > 0$ plus petite valeur propre de Δ sur L^2 avec cond⁰ de Dirichlet.

$$\|(\Delta+v)u\|_{L^2}^2 = \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|Vu\|_{L^2}^2 + 2 \operatorname{Re} \langle \Delta u, Vu \rangle$$

$$\|\langle \Delta u, Vu \rangle\| \leq \|\langle du, dv \cdot u + v du \rangle\| \leq c \|du\|_{L^2} (\|du\|_{L^2} + \|u\|_{L^2})$$

$$\|(\Delta+v)u\|_{L^2}^2 \geq \|\Delta u\|_{L^2}^2 - c' \|du\|_{L^2}^2 \leq c'' \|du\|_{L^2}^2$$

donc si $u \in \operatorname{Im} \Pi_{[0, \lambda]}(\Delta)^\perp$ on a $\|\Delta u\|_{L^2}^2 \geq 2c' \|du\|_{L^2}^2$
pour λ assez grand (dépend de c').

on a le résultat sur $\operatorname{Im} \Pi_{[0, \infty)}(\Delta)$

$\Pi_{[0, \infty)}(\Delta)$ est de dim $< \infty$, donc

$$\text{et } \|u\|_{H^2} = \|\Pi_{[0, \lambda]}(\Delta)u\|_{L^2}^2 + \|\Pi_{[\lambda, \infty)}(\Delta)u\|_{H^2}^2$$

mais $\|\Pi_{[0, \lambda]}(\Delta)u\|_{H^2} \leq C_\lambda \|u\|_{L^2}$ et sur $\operatorname{Im} \Pi_{[0, \lambda]}(\Delta)$.

$$\|(\Delta+v)u\|_{L^2} \geq c'' \|u\|_{L^2} \quad \text{car } K_{\Delta}(\Delta+v) = 0 + \dim < \infty$$

[Corollaire: si $H^{-2} = (H_0^2)^\perp$, $\beta \in L^2$, $\exists! u \in H^2$,
 $(\Delta+v)u = \beta$ et $\|u\|_{L^2} \leq C \|\beta\|_{H^{-2}(\Omega)}$]

preuve: on a que H_0^2 est représentée

par $\{u \in C_0^\infty\}^{N_v}$ où $N_v(u)^2 = \int_{\Omega} |(\Delta+v)u|^2$

$B(u, v) = \langle (\Delta+v)u, (\Delta+v)v \rangle_{L^2}$ est un produit scalaire

et par Riesz, si $\beta \in L^2$, et $F(\varphi) = \int \beta \cdot \varphi = \langle \beta, \varphi \rangle_{L^2}$

alors $|F(\varphi)| \leq \|\beta\|_{H^{-2}} \|\varphi\|_{H_0^2} \leq C \|\beta\|_{H^{-2}} \|\varphi\|_B$

$\exists! \tilde{u} \in H_0^2$, $B(u, \varphi) = \langle \beta, \varphi \rangle = F(\varphi)$

$$\int_{\Omega} (\Delta+v)\tilde{u} \cdot (\Delta+v)\bar{\varphi} = \int \beta \bar{\varphi} \quad \forall \varphi \in H_0^2$$

$$\Rightarrow (\Delta+v)(\Delta+v)\tilde{u} = \beta$$

$u \in L^2$

$$\|u\|_{L^2} = \|(\Delta+v)\tilde{u}\|_{L^2} = \|\tilde{u}\|_B \leq C \|\beta\|_{H^{-2}}$$

□

(2) solutio oscillante de $(\Delta + V)u = 0$ pour $u \in \mathcal{D}M$: $\chi \in C_c^\infty$

$$u_h = N_h + R_h \quad \text{on} \quad N_h = \chi(z/\sqrt{h}) e^{i\frac{\phi_h}{h}x - \frac{y}{h}}$$

$$\text{et } (\Delta + V)N_h = \sqrt{h} N_h + e^{i\frac{\phi_h}{h}x - \frac{y}{h}} \Delta \chi(z/\sqrt{h}) = 2h^{3/2} \nabla \chi(z/\sqrt{h}) \cdot \nabla e^{i\frac{\phi_h}{h}x - \frac{y}{h}}$$

$$\begin{aligned} \|N_h\|_{L^2}^2 &= \int \chi(z/\sqrt{h})^2 e^{-2y/h} dx dy = h \int \chi(z) e^{-2y/h} dx dy \\ &= h^{3/2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 e^{-2y/h} \chi(x, \sqrt{h}y) dx dy \leq C h^{3/2} \end{aligned}$$

$$\|e^{i\frac{\phi_h}{h}x} \Delta \chi(z/\sqrt{h})\|_{H^{-2}}^2 = ?$$

Si $w \in H_0^{-2}$ on a $\int e^{i\frac{\phi_h}{h}x} \Delta \chi(z/\sqrt{h}) \cdot w dx dy = \int \chi(z/\sqrt{h}) \Delta (e^{i\frac{\phi_h}{h}x} w) dx dy$
notons $(\partial_x - i\partial_y) e^{i\frac{\phi_h}{h}x} = \partial_z e^{i\frac{3}{2}x} = \frac{i}{h} e^{i\frac{3}{2}x}$

$$\text{donc} \quad \int e^{i\frac{3}{2}x} h^{-2} \Delta \chi(z/\sqrt{h}) \cdot w = -i \int e^{i\frac{3}{2}x} (\partial_z (\Delta \chi(z/\sqrt{h}) w))$$

$\Rightarrow$ à chaque terme on gagne $\sqrt{h}$ si on dérive par w et h si on dérive w .

$$\Rightarrow \|R_h\|_{H^{-2}}^2 = \mathcal{O}(h^{5/2})$$

donc

~~$u_h = N_h + R_h$~~

$$u_h = N_h + \mathcal{O}_{L^2}(h^{5/4})$$

Identité intégrale :

$$\begin{cases} \int_M (V_1 - V_2) u_1 u_2 = 0 & \text{si } u_{V_1} = u_{V_2} \\ \int_M V u_1 u_2 = \int_M (N_1 - N_2) \beta_1 \cdot \beta_2 & (V_2 = 0) \end{cases}$$

preuve :

$$\begin{aligned} (\Delta + V_1)u_1 &= 0 \\ (\Delta + V_2)u_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \begin{aligned} u_1|_{\partial M} &= \beta_1 \\ u_2|_{\partial M} &= \beta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_M u_1 (V_1 - V_2) u_2 &= \int_M \Delta u_2 \cdot u_1 - \Delta u_1 \cdot u_2 = \int_M \partial_n u_2 \cdot u_1 + \partial_n u_1 \cdot u_2 \\ &= -\int_M u_2^2 \beta_2 \cdot \beta_1 + u_1^2 \beta_1 \cdot \beta_2 \end{aligned}$$

Si $C_{V_1} = C_{V_2}$ car les deux sont les $\tilde{m}$, alors

$$\exists N, (\Delta + V_2)N = 0 \quad N|_{\partial M} = \beta_1 \quad \text{et} \quad \partial_n N = \partial_n u_1$$

$$\begin{aligned} \int_M u_1 (V_1 - V_2) u_2 &= \int_M \partial_n u_2 \cdot N|_{\partial M} + \partial_n N|_{\partial M} \cdot u_2 \\ &= \int_M \Delta u_2 N - \Delta N u_2 = 0 \end{aligned}$$

(X) Le problème linéarisé (motivation et intuition pour le problème non-linéaire)

On prend un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ à bord lisse, une famille de potentiels $V_t \in L^\infty$ pour $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, et $t \rightarrow V_t$ est C^1 , et $V_0 = 0$.

Soit $W_t := W_{V_t}$ l'opérateur Dirichlet-to-Neumann de $\Delta + V_t$ où $\Delta = -(\partial_x^2 + \partial_y^2)$ est le Laplacien plan. On suppose $\ker_{L^2} \Delta + V_t = \{0\}$.

Fixons $f, g \in C^\infty(\partial\Omega)$ et soient u_t, v_t les solutions des problèmes de Dirichlet/Poisson :

$$\begin{cases} (\Delta + V_t)u_t = 0 \\ u_t = f \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (\Delta + V_t)v_t = g \\ v_t = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

on a : $\langle W_t f, \bar{g} \rangle = \int_{\Omega} (\nabla u_t \cdot \nabla \bar{v}_t + V_t u_t \bar{v}_t)$ par Green et définition de W_t .

on dérive en $t=0$: ($\partial_t|_{t=0}$ est noté $\dot{\cdot}$) en supposant $\dot{N}_0 = 0$

$$0 = \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla \dot{N}_0 + \nabla \dot{u}_0 \cdot \nabla N_0 \stackrel{\text{Green}}{=} \int_{\partial\Omega} \partial_n u_0 \cdot \dot{N}_0 + \partial_n N_0 \cdot \dot{u}_0 + \dot{V}_0 u_0 N_0 + V_0 (\dot{u}_0 N_0 + u_0 \dot{N}_0)$$

$$\boxed{0 = \int_{\Omega} \dot{V}_0 u_0 N_0} \quad \text{car} \quad \dot{u}_0 = \dot{N}_0|_{\partial\Omega} = 0$$

donc $\dot{V}_0$ est orthogonal aux produits de fonctions harmoniques dans Ω .

Pour montrer que $\dot{V}_0$, il suffit de vérifier que $\{u_0 N_0; u_0 \text{ et } N_0 \text{ harmoniques}\}$ est dense dans L^2 .

Idee : se ramener à la transformée de Fourier de $\dot{V}_0$: pour $\alpha \in \mathbb{C}$ on prend $u_0(z) = e^{z\alpha}$ et $N_0(z) = e^{-\bar{\alpha}z}$ qui sont holomorphes / anti-holomorphes :

$$\text{Donc} \quad u_0(z) N_0(z) = e^{2i \operatorname{Im}(z\alpha)} = e^{2i(x,y) \cdot \alpha'}$$

$$\text{où } \alpha' = (\alpha_2, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$$

on déduit que $\widehat{\dot{V}_0}(2\alpha') = 0$ et ainsi $\forall \alpha' \in \mathbb{R}^2$ donc

$$\boxed{\dot{V}_0 = 0}$$

Conclusion : $\boxed{\partial_t W_{V_t}|_{t=0} = 0 \Rightarrow \partial_t V_t|_{t=0} = 0}$

Remarque : on a utilisé des fonctions à "fréquences complexes" α et on s'est ramené aux fréquences réelles en annulant les parties réelles des phases αz et $-\bar{\alpha}z$ grâce au fait qu'on considère des produits $u \bar{v}$.

Le problème non-linéaire

la formule de Green nous dit que si V_1, V_2 sont deux potentiels $L^\infty(\Omega)$ et si $\Delta V_1 = \Delta V_2$ en tant qu'opérateurs, alors :

si u_1, u_2 sont solutions de $(\Delta + V_1)u_1 = 0$, $(\Delta + V_2)u_2 = 0$,

$$\boxed{\int_{\Omega} (V_1 - V_2) u_1 u_2 = 0}$$

on veut donc montrer que $\{u_1 u_2 ; (\Delta + V_i)u_i = 0, u_i \in L^2\}$ sont denses dans $L^2(\Omega)$.

Les u_i ne sont plus des fonctions harmoniques comme dans le problème linéarisé en $V=0$.

Idee : Construire des solutions de la forme :

$$u_1 = e^{\frac{\Phi_h(z)}{h}} (a + r_h^1(z)) \quad u_2 = e^{-\frac{\bar{\Phi}_h(z)}{h}} (\bar{b} + r_h^2(z))$$

où h est un paramètre et $\Phi_h(z)$ holomorphe, et

$$\|r_h^i\|_{L^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \text{ et } a, b \text{ holomorphes des amplitudes.}$$

typiquement $\Phi_h(z)$ sera de la forme $\Phi_h(z) = \frac{\phi(z)}{h}$ ~~ou~~.

auquel cas

$$u_1 u_2 = e^{\frac{2i \operatorname{Im} \phi(z)}{h}} a \bar{b}(z) + \text{reste petit qd } h \rightarrow 0$$

On observe que la concentration (au sens faible) d'une famille de fonctions/distributions $e^{\frac{2i\psi(z)}{h}} c(z)$ se fait aux points où

$\nabla \psi(z) = 0$, i.e. aux points stationnaires de ψ , quand $h > 0, h \rightarrow 0$

Lemme de la phase stationnaire (cf. livre de Zworski).

$a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ réelle

si $x_0 \in \operatorname{Supp}(a)$, $d\psi(x_0) = 0$ et $\operatorname{Hess}(\psi)(x_0)$ est non dégénéré

$$I_h := \int_{\mathbb{R}^n} a(x) e^{i \frac{\psi(x)}{h}} dx = h^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} (A_{2k}(x_0) a)(x_0) h^k e^{i \frac{\psi(x_0)}{h}} + \mathcal{O}(h^{N+\frac{n}{2}}) \|a\|_{C^{2N+n+1}}$$

où $A_{2k}(x_0)$ sont des opérateurs différentiels d'ordre $\leq 2k$.

• en particulier, en dimension 2 :

$$A_0 = (2\pi) |\det(\text{Hess}(\psi)(x_0))|^{-\frac{1}{2}} e^{i \frac{\pi}{4} \text{Sign}(\text{Hess}(\psi)(x_0))}$$

$$\text{donc } \int_{\mathbb{R}^2} a(z) e^{i \frac{\psi(z)}{h}} dz = h A_0 a(z_0) e^{i \frac{\psi(z_0)}{h}} + \mathcal{O}(h^2)$$

quand $h \rightarrow 0$ si z_0 est le point critique de la phase.

Conséquences : si $V_1 - V_2$ est C^∞ et s'annule rapidement au bord $\partial\Omega$,

et si $\text{Im} \phi = \psi$ a un unique point critique en $z_0 \in \bar{\Omega}$,

non-dégénéré, et $\psi(z_0) = 0$, on a $\int_{\Omega} (V_1 - V_2) u_1 u_2 = h A_0 (V_1 - V_2)(z_0) + \text{les termes contenant } R_h^1(z) \text{ et } R_h^2(z)$

donc si les termes de reste sont $\mathcal{O}(h)$, on a montré que

$$(V_1 - V_2)(z_0) = 0 \quad \text{si} \quad \mathcal{N}_{V_1} = \mathcal{N}_{V_2}.$$

Méthode

1) trouver une phase avec un point critique non-dégénéré unique, ϕ holomorphe

2) montrer l'existence de solutions du type

$$u_h = e^{\frac{\phi}{h}} (a(z) + R_h(z)) \quad (*)$$

avec estimation précise sur $R_h(z)$ quand $h \rightarrow 0$.

Résolution dans un domaine de $\mathbb{C}$

La phase : le point (1) est facile : poser $\phi(z) = (z - z_0)^2$ pour $z_0 \in \bar{\Omega}$ fixé

$$\text{on a } \text{Im} \phi(z) = 2 \text{Re}(z - z_0) \text{Im}(z - z_0) = 2(x - x_0)(y - y_0)$$

$z_0 = (x_0, y_0)$ est un point critique non-dégénéré, le Hessian est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

donc de signature 0.

(2) les solutions : les solutions de type $(*)$ avec $\|R_h\|_2 \rightarrow 0$ sont appelées optiques géométriques complexes - pour les construire, on peut utiliser 2 approches différentes :

- Inégalités de Carleman
- méthode de noyau intégral

Chaque approche a ses avantages et inconvénients ; les inégalités de Carleman sont "plus souples" et mieux adaptées aux problèmes à donnée ponctuelle au bord, la méthode de noyau intégral est meilleure pour une approche constructive et pour traiter des cas à faible régularité.

a) Approche Carleman.

on verra éventuellement plus tard une approche générale pour les estimées de Carleman, ici on montre l'inégalité à la main.

D'abord, $\Delta = -\partial_{\bar{z}}\partial_z$, ~~donc~~ si $\phi = \psi + i\varphi$ est holomorphe on va montrer une inégalité du type : $\forall u \in C^\infty(\bar{\Omega}), \forall h > 0$ petit

$$(EC). \quad \|e^{-\frac{\phi}{h}} \Delta e^{\frac{\phi}{h}} u\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{C(h)} \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{C'(h)} \|du\|_{L^2}^2$$

pour des constantes $C(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ et $C'(h) > \varepsilon > 0$ pour ε indep. de h

il s'agit d'une estimée coercive mais pas elliptique au sens usuel.

Proposit° : si ϕ a des points critiques isolés et non dégénérés et φ est harmonique on a $\forall u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

$$\|e^{-\frac{\phi}{h}} \Delta e^{\frac{\phi}{h}} u\|_{L^2}^2 \geq \frac{c}{h^2} \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + c \|du\|_{L^2}^2 \quad \text{pour } c > 0$$

et si ϕ a un point critique unique, non dégénéré,

$$\|e^{-\frac{\phi}{h}} \Delta e^{\frac{\phi}{h}} u\|_{L^2}^2 \geq \frac{c}{h} \|u\|_{L^2}^2 + c \|du\|_{L^2}^2$$

pour $c > 0$

preuve. d'abord on écrit :

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\phi}{h}} \Delta e^{\frac{\phi}{h}} &= -e^{-\frac{\phi}{h} + i\frac{\varphi}{h}} \partial_{\bar{z}} \cancel{e^{i\frac{\varphi}{h}}} \cdot \partial_z e^{\frac{\phi}{h} + i\frac{\varphi}{h}} \\ &= -e^{i\frac{\varphi}{h}} \partial_{\bar{z}} e^{-\frac{\phi}{h} + i\frac{\varphi}{h}} \partial_z e^{i\frac{\varphi}{h}} \quad \text{car } [\partial_{\bar{z}}, \phi] = 0 \\ e^{-\frac{\phi}{h}} \Delta e^{\frac{\phi}{h}} &= -e^{i\frac{\varphi}{h}} \partial_{\bar{z}} e^{-i\frac{\varphi}{h}} \cdot e^{-i\frac{\varphi}{h}} \partial_z e^{i\frac{\varphi}{h}} \end{aligned}$$

il suffit de montrer l'inégalité pour u à valeurs réelles.

On remarque que $\| e^{i\frac{\psi}{h}} \partial_{\bar{z}} (e^{-i\frac{\psi}{h}} v) \|_{L^2} = \| \partial_{\bar{z}} (e^{-i\frac{\psi}{h}} v) \|_{L^2} \quad \forall v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$

or $\partial_{\bar{z}}(a+ib) = \partial_x a - \partial_y b + i(\partial_x b + \partial_y a)$ si a, b à valeurs réelles, $\in C_0^\infty(\bar{\Omega})$

donc
$$\int_{\Omega} (\partial_x a - \partial_y b)^2 + (\partial_x b + \partial_y a)^2 \, dx dy$$

$$= \int_{\Omega} (|\nabla a|^2 + |\nabla b|^2 - 2\partial_y b \partial_x a + 2\partial_y a \partial_x b) \, dx dy$$

$\int |\partial_{\bar{z}}(a+ib)|^2 = \int_{\Omega} |\nabla(a+ib)|^2 \, dx dy$ en intégrant par parties pour éliminer les termes croisés.

$\Rightarrow \| e^{i\frac{\psi}{h}} \partial_{\bar{z}} (e^{-i\frac{\psi}{h}} v) \|_{L^2}^2 = \| \nabla (e^{-i\frac{\psi}{h}} v) \|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{2} \| e^{-i\frac{\psi}{h}} v \|_{L^2}^2$
 $= C \| v \|_{L^2}^2$ par Poincaré car $v \in H_0^1$

on obtient donc

$\boxed{\| e^{i\frac{\psi}{h}} \partial_{\bar{z}} (e^{-i\frac{\psi}{h}} v) \|_{L^2}^2 \geq C \| v \|_{L^2}^2}$ avec C indep de $h > 0$

• on calcule ensuite $\| e^{-i\frac{\psi}{h}} \partial_{\bar{z}} (e^{i\frac{\psi}{h}} u) \|_{L^2}^2$ avec u à valeurs réelles $u \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$.

$$\| e^{-i\frac{\psi}{h}} \partial_{\bar{z}} (e^{i\frac{\psi}{h}} u) \|_{L^2}^2 = \| i \partial_{\bar{z}} \frac{\psi}{h} \cdot u + \partial_{\bar{z}} u \|_{L^2}^2$$

$$= \| \partial_x u + \partial_{\bar{z}} \frac{\psi}{h} u \|_{L^2}^2 + \| \partial_y u - \partial_x \frac{\psi}{h} u \|_{L^2}^2$$

$$= \| du \|_{L^2}^2 + \frac{1}{h^2} \| |\psi| \cdot u \|_{L^2}^2 + \frac{2}{h} \langle \partial_x u, \partial_y \psi \cdot u \rangle + \frac{2}{h} \langle \partial_y u, \partial_x \psi \cdot u \rangle$$

$$= \| du \|_{L^2}^2 + \frac{1}{h^2} \| |\psi| \cdot u \|_{L^2}^2 + \frac{2}{h} \left(\int_{\Omega} \partial_x (u^2) \cdot \partial_y \psi - \partial_y (u^2) \cdot \partial_x \psi \, dx dy \right)$$

int. par parties $\xrightarrow{=0}$

$$\boxed{\| e^{-i\frac{\psi}{h}} \partial_{\bar{z}} (e^{i\frac{\psi}{h}} u) \|_{L^2}^2 = \| du \|_{L^2}^2 + \frac{1}{h^2} \| |\psi| \cdot u \|_{L^2}^2 + \frac{1}{h} \int_{\Omega} u^2 (\partial_x \partial_y \psi - \partial_y \partial_x \psi) \, dx dy}$$

Conclusion: Par Cauchy-Riemann $|\psi| = |\psi|$ donc pour $u \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$

$$\boxed{\| e^{-i\frac{\psi}{h}} \partial_{\bar{z}} (e^{i\frac{\psi}{h}} u) \|_{L^2}^2 \geq C \left(\| du \|_{L^2}^2 + \frac{1}{h^2} \| |\psi| \cdot u \|_{L^2}^2 \right)}$$

et par densité, ceci s'étend à $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Supposons maintenant que $\psi = \text{Re}((z-z_0)^2) = (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2$, $|\psi| = 2|z-z_0|^2$

D'abord on observe que: pour $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$4 \int_{\Omega} |v|^2 \, dx dy = - \int_{\Omega} |v|^2 \cdot \Delta \psi \, dx dy = \int_{\Omega} \nabla |v|^2 \cdot \nabla \psi \, dx dy$$

$$= -4 \text{Re} \int_{\Omega} \bar{v} \nabla v \cdot (x-x_0, y-y_0) \, dx dy$$

$$4 \| v \|_{L^2}^2 \leq \frac{4}{\varepsilon} \int_{\Omega} |z-z_0|^2 |v|^2 + 4\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla v|^2$$

 Cauchy-Schwarz

pour $h \in \text{petit}$. On a donc, en posant $\varepsilon = \frac{1}{h}$ ~~on a donc~~

$$\frac{1}{h^2} \| |\Delta f| u \|^2 \geq \frac{4}{\varepsilon} \|u\|_{L^2}^2 - 4 \|du\|_{L^2}^2$$

et enfin

$$\boxed{\|du\|_{L^2}^2 + \frac{1}{h^2} \| |\Delta f| u \|^2 \geq \frac{1}{2h} \|du\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|du\|_{L^2}^2}$$

On a donc pour h petit, $\forall u \in H^2 \cap H_0^1$

$$\| e^{-\frac{\varepsilon}{2}(\Delta+V)} e^{\frac{\varepsilon}{2}V} u \|_{L^2} \geq \| e^{-\frac{\varepsilon}{2}\Delta} e^{\frac{\varepsilon}{2}V} u \|_{L^2} - \|V\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}$$

$$\| e^{-\frac{\varepsilon}{2}(\Delta+V)} e^{\frac{\varepsilon}{2}V} u \|_{L^2} \geq \frac{1}{\sqrt{h}} \|u\|_{L^2} + C \|du\|_{L^2} \quad (\text{pour } C > 0).$$

Si $P_h := e^{-\frac{\varepsilon}{2}(\Delta+V)} e^{\frac{\varepsilon}{2}V}$, on voit que P_h est injectif pour $h > 0$ petit, donc son adjoint va être surjectif.

Lemme: Si $V \in L^\infty(\Omega)$, alors $\exists h_0 > 0$, pour $h \in]0, h_0]$, $\forall f \in L^2(\Omega)$, il existe $N \in L^2$ tel que $e^{-\frac{\varepsilon}{2}(\Delta+V)} e^{\frac{\varepsilon}{2}V} N = f$ et $\|N\|_{L^2(\Omega)} \leq C \sqrt{h} \|f\|$

preuve: on utilise un argument de dualité, comme dans la résolution du problème de Dirichlet: Soit $\mathcal{A}$ l'espace:

$$\mathcal{A} := \{ u \in H_0^1(\Omega); (\Delta+V)u \in L^2(\Omega) \}, \text{ muni du produit}$$

$$\text{Scalaire } \langle u, w \rangle_{\mathcal{A}} := \int_{\Omega} e^{-2\frac{\varepsilon}{2}V} \overline{(\Delta+V)u} \cdot (\Delta+V)w \, dx$$

$\mathcal{A}$ est un Hilbert en utilisant l'inégalité de Carleman:

en effet, on a pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, (quitte à prendre $C > 0$ assez petit)

$$\begin{aligned} \| e^{-\frac{\varepsilon}{2}(\Delta+V)} e^{\frac{\varepsilon}{2}V} u \|_{L^2} &\geq C \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \|du\|_{L^2} + \frac{1}{h} \| |\Delta f| u \|_{L^2} + \|du\|_{L^2} \right) \\ &\geq C \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \|u\|_{L^2} + \frac{1}{h} \| |\Delta f| u \|_{L^2} + \varepsilon \|du\|_{L^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \| e^{-\frac{\varepsilon}{2}(\Delta+V)} N \| &\geq C \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \| e^{-\frac{\varepsilon}{2}V} N \|_{L^2} + \frac{1}{h} \| |\Delta f| \cdot e^{\frac{\varepsilon}{2}V} N \|_{L^2} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \| e^{-\frac{\varepsilon}{2}V} N \|_{L^2} - \frac{\varepsilon}{h} \| |\Delta f| \cdot e^{\frac{\varepsilon}{2}V} N \|_{L^2} \right) \\ &\geq \frac{C}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \| e^{-\frac{\varepsilon}{2}V} N \|_{L^2} + \varepsilon \| e^{-\frac{\varepsilon}{2}V} N \|_{L^2} \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ une suite de Cauchy N_n pour $\mathcal{A}$ l'est dans $H_0^1(\Omega)$ donc converge ds $H_0^1(\Omega)$ vers N ; comme $\|(\Delta+V)N_n\|_{L^2} \leq C(h)$, on a une sous suite de $(\Delta+V)N_n$ convergent vers $w \in L^2$ au sens faible, et par unicité $(\Delta+V)N = w \in L^2$, ce qui montre que $\mathcal{A}$ est complet.

Posons alors $L_f: \begin{matrix} \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C} \\ w \mapsto \int_{\Omega} e^{-\frac{1}{4h}} \bar{f} w \, dxdy \end{matrix}$, on a $|L_f(w)| \leq \|f\|_{L^2} \|w\|_{\mathcal{U}}$

par Cauchy-Schwarz, donc par Riesz, $\exists u \in \mathcal{U}$ tq $\langle u, w \rangle_{\mathcal{U}} = L_f(w) \quad \forall w \in \mathcal{U}$.

Ceci donne $\int_{\Omega} e^{-\frac{2\varphi_h}{4}} \overline{(\Delta + \bar{V})u} \cdot (\Delta + \bar{V})w \, dxdy = \int_{\Omega} e^{-\frac{\varphi_h}{4}} \bar{f} \cdot w \, dxdy$

donc $(\Delta + V) e^{-\frac{\varphi_h}{4}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{\varphi_h}{4}} (\Delta + \bar{V})u}_{=: N} = e^{-\frac{\varphi_h}{4}} f$

de plus $\|N\|_{L^2} = \|u\|_{\mathcal{U}} \leq C \|f\|_{L^2} \sqrt{h} \quad \square$

Ceci nous donne une façon de construire des solutions de $(\Delta + V)u = 0$

de la forme $u_h^{(z)} = e^{\frac{\phi(z)}{4h}} (a(z) + r_h(z))$ avec $\phi(z) = (z - z_0)^2$
 $a(z)$ holomorphe.

En effet:

$$(\Delta + V)(e^{\frac{\phi_h}{4h}} a(z)) = (V e^{\frac{\phi_h}{4h}} a(z)) \quad \text{car} \quad \partial_{\bar{z}}(e^{\frac{\phi_h}{4h}} a) = 0$$

le lemme précédent nous dit qu'il existe $r_h(z)$ tel que

- $\|r_h\|_{L^2} \leq C \sqrt{h} \|V a\|_{L^2}$

- $(\Delta + V)(e^{\frac{\varphi_h}{4h}} r_h) = -e^{\frac{\varphi_h}{4h}} (e^{i\varphi_h} V a)$, c'est-à-dire

que $(\Delta + V)(e^{\frac{\phi_h}{4h}} (e^{-i\varphi_h} r_h)) = -e^{\frac{\phi_h}{4h}} V a$

et finalement $u_h = e^{\frac{\phi_h}{4h}} (a + e^{-i\varphi_h} r_h)$ est solⁿ de $(\Delta + V)u = 0$

et $\|r_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(\sqrt{h})$.

On a montré:

Proposition: Pour tout $a(z)$ holomorphe, il existe une solution $u_h(z)$ de $(\Delta + V)u_h = 0$ telle que $u_h(z) = e^{\frac{\phi_h(z)}{4h}} (a(z) + r_h(z))$ avec $\|r_h(z)\|_{L^2} = \mathcal{O}(\sqrt{h})$.

remq: le même résultat marche clairement avec $e^{\frac{\bar{\phi}_h}{4h}} (\bar{a} + r_h)$ aussi.

L'égalité intégrale (conséquence de Green) nous dit que $N_{V_1} = N_{V_2} \Rightarrow$

$$\int_{\Omega} (V_1 - V_2) u_1 u_2 = 0 \quad \text{Si } u_1, u_2 \text{ solutions de } (\Delta + V_i)u_i = 0$$

$\rightarrow$ Si on applique avec $u_h^{(1)} = e^{\frac{\phi_h}{4h}} (1 + r_h^{(1)}(z))$ et $u_h^{(2)} = e^{\frac{\bar{\phi}_h}{4h}} (1 + r_h^{(2)}(z))$

par phase stationnaire: $0 = \int (V_1 - V_2) u_h^{(1)} u_h^{(2)} = A_0 h (V_1 - V_2)(z_0) + o(h) + \mathcal{O}(\sqrt{h}) \quad (h \rightarrow 0)$

l'erreur induite par r_h est trop grosse!

- On va donc améliorer l'ansatz $e^{\frac{\phi}{h}}$ en y ajoutant un terme $e^{\frac{\phi}{h}}$ de sorte que $e^{-\frac{\phi}{h}}(\Delta+V)(e^{\frac{\phi}{h}}(1+r_1)) = o(\sqrt{h})$ quand $h \rightarrow 0$.
Pour cela on va chercher r_1 vérifiant :

$$(*) \quad \begin{cases} e^{-\frac{\phi}{h}} \Delta(e^{\frac{\phi}{h}} r_1) = - \underbrace{e^{-\frac{\phi}{h}} (\Delta+V)(e^{\frac{\phi}{h}})}_{=-V} + o(\sqrt{h}) \\ \|r_1\|_{L^2} = o(\sqrt{h}) \end{cases}$$

(*) devient $e^{-\frac{\phi}{h}} \Delta(e^{\frac{\phi}{h}} r_1) = -V + o(\sqrt{h})$.

On factorise $\Delta = -\partial_{\bar{z}} \partial_z$, donc $e^{-\frac{\phi}{h}} \Delta e^{\frac{\phi}{h}} = -\partial_{\bar{z}} e^{-\frac{\phi}{h}} \partial_z e^{\frac{\phi}{h}}$
car $[\partial_{\bar{z}}, e^{\frac{\phi}{h}}] = 0$, donc $e^{-\frac{\phi}{h}} \Delta e^{\frac{\phi}{h}} = -\partial_{\bar{z}} e^{-\frac{2i\psi}{h}} \partial_z e^{\frac{2i\psi}{h}}$

Si on note $R = R(h)$ la résolvante en $\lambda=0$ de Δ avec condition de Dirichlet sur Ω on a $-\partial_{\bar{z}}(\partial_z R) = \text{Id}$ sur $L^2(\Omega)$, donc $T = \partial_z \circ R$ est un inverse à droite pour $\partial_{\bar{z}}$. En fait, si $R_{\mathbb{R}^2}(0)$ est la convolution par $G = \frac{1}{2\pi} \log|z|$, on a aussi

$$-\partial_{\bar{z}}(\partial_z R_{\mathbb{R}^2}(0)) = \text{Id sur } L^2(\Omega) \quad \text{et } T_{\mathbb{R}^2} \text{ a pour moyen intég. } T_{\mathbb{R}^2}(z, z') = \frac{1}{2\pi} \partial_z \log|z-z'| = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{z-z'}$$

il s'agit de la convolution par $\frac{1}{4\pi z}$ qui est $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

On a donc que si $w(z)$ est holomorphe, et si $e^{-\frac{2i\psi}{h}} \partial_z(e^{\frac{2i\psi}{h}} r_1) = -T(V)$ alors $e^{-\frac{\phi}{h}} \Delta(e^{\frac{\phi}{h}} r_1) = +\partial_{\bar{z}} T(V) = -V$

Essayons alors de résoudre $e^{-\frac{2i\psi}{h}} \partial_z(e^{\frac{2i\psi}{h}} r_1) = -T(V) + w$ où $w(z)$ sera choisi plus tard pour faciliter les estimées (de sorte que $+T(V)(z_0) = w(z_0)$)
 $\Rightarrow$ l'opérateur T a moyen $T_{\mathbb{R}^2}(z, z') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{z-z'}$ inverse $-\partial_{\bar{z}}$;

Soit $\chi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ qui vaut 1 près de z_0 , posons r_{11} défini par

$$r_{11}(z) = e^{-\frac{2i\psi(z)}{h}} \bar{T}(e^{\frac{2i\psi(z)}{h}} \chi b)(z)$$

où $-b(z) = -T(V)(z) + w(z)$

$\Rightarrow$ on a

$$e^{-\frac{2i\psi}{h}} \partial_z(e^{\frac{2i\psi}{h}} r_{11})(z) = \chi(z) (w(z) - T(V)(z)) \quad (1)$$

et comme

$$e^{-\frac{2i\psi}{h}} \partial_z e^{\frac{2i\psi}{h}} = \partial_z + 2i \frac{\partial_z \psi}{h}$$

on va poser

$$r_{12}(z) = \frac{h}{2i \partial_z \psi(z)} (1 - \chi(z)) (w(z) - T(V)(z))$$

(on remarque que $\partial_z \Psi(z) \neq 0$ sur le support de $(1-\chi)$).

$$\text{On a (2)} \quad \left\{ e^{-\frac{2i\Psi}{h}} \partial_z (e^{\frac{2i\Psi}{h}} R_{12}) = (1-\chi(z))(\omega(z) - T(v)(z)) + \partial_z R_{12}(z) \right\}$$

donc
$$e^{-\frac{2i\Psi}{h}} \partial_z (e^{\frac{2i\Psi}{h}} (R_{11} + R_{12}))(z) = \omega(z) - T(v)(z) + \partial_z R_{12}(z) \quad (3)$$

en utilisant (1) + (2)

- Il nous faut estimer le reste $\|\partial_z R_{12}\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|R_{11}\|_{L^2(\Omega)}$ si

$$R_1 = R_{11} + R_{12}$$

- l'opérateur T est une convolution par L^1_{loc} donc il existe $L^p_{comp} \rightarrow L^p_{loc}$
 $\forall p \in (1, \infty)$ et $T: L^2_{comp} \rightarrow H^1_{loc}$, donc $\|R_{12}\|_{H^1(\Omega)} = O(h)$
 si $V \in L^p(\Omega)$ avec $p \geq 2$.

- le terme R_{11} demande un peu plus de travail.

Lemme: si $V \in H^{1+\alpha}(\Omega)$, $\alpha > 0$, on a $\|R_{11}\|_{L^2} = O(h^{1-\varepsilon})$, $\forall \varepsilon > 0$

preuve: Déjà, on a $-\partial_z \bar{T}(\cdot, z') = S_{z'}(z)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, i.e.
 $\langle \bar{T}(\cdot, z'), \partial_z \Psi \rangle = \Psi(z')$, $\forall z' \in \text{supp}(\Psi)$, $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

On veut calculer la norme de $\int_{\Omega} \bar{T}(z, z') e^{\frac{2i\Psi(z')}{h}} \chi(z') b(z') dz'$

on a aussi $\partial_{z'} \bar{T}(z, \cdot) = S_z(z')$ par symétrie de $\bar{T}$, donc

$$\langle \bar{T}(z, \cdot), -\partial_{z'} \Psi \rangle = \Psi(z) \quad \text{si } \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

on écrit $e^{\frac{2i\Psi(z')}{h}} = \partial_{z'} (e^{\frac{2i\Psi(z')}{h}}) \cdot \frac{h}{2i\partial_{z'} \Psi(z')}$ et on veut intégrer par parties par yague de h .

Soit $\eta_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$ qui vaut 1 près de z_0 (le point critique de Ψ),

$\eta_\delta = 1$ dans $|z - z_0| < \delta/2$, et supportée dans $|z - z_0| < \delta$ où $\delta > 0$ est un paramètre à choisir.

$$\begin{aligned} \text{On a: } \int_{\Omega} \bar{T}(z, z') e^{\frac{2i\Psi(z')}{h}} (1 - \eta_\delta(z')) \chi(z') b(z') dz' &= - \frac{h(1 - \eta_\delta(z')) \chi(z') b(z')}{2i\partial_{z'} \Psi(z')} e^{\frac{2i\Psi(z')}{h}} \\ &\quad - h \int_{\Omega} \bar{T}(z, z') e^{\frac{2i\Psi(z')}{h}} \partial_{z'} \left(\frac{(1 - \eta_\delta(z')) \chi(z') b(z')}{2i\partial_{z'} \Psi(z')} \right) dz'. \end{aligned}$$

Puisque $\chi b(z_0) = 0$ le premier terme dans le membre de droite est $O_{\infty}(h)$ si b est C^1 (par exemple si $V \in H^{1+\alpha}(\Omega)$ avec $\alpha > 0$)
 (en choisissant bien $\omega(z)$ de sorte que $b(z_0) = 0$)

On majore la deuxième terme par $Ch \int_{\Omega} \frac{1}{|z-z'|} \left(\frac{|1-\eta_S(z')|}{|z'-z_0|} + |\eta'_S(z')| \right) dx dy'$
 $\leq Ch \int_{\substack{\delta_2 < |z'-z_0| < S}} \frac{1}{\delta} \frac{1}{|z'-z'|} dx dy' + Ch \int_{\substack{\Omega \cap \{|z'-z_0| > \delta_2\}}} \frac{1}{|z'-z'|} \cdot \frac{1}{|z'-z_0|} dx dy'$ on $z' = x' + iy'$

puisque $\frac{1}{|z'|}$ est $L^p(\Omega)$ pour tout Ω compact et $1 \leq p < 2$ on utilise Cauchy-Schwarz

• pour le premier terme : $\sup_{z \in \Omega} \left(\frac{1}{\delta} \int_{\substack{\delta_2 < |z'-z_0| < S}} \frac{1}{|z'-z'|} dx dy' \right) = O(S^{\frac{2}{p}-1})$ on $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

• pour le deuxième terme : la convolut^o par $\frac{1}{|z'|}$ est continue sur L^p ce qui revient à calculer la norme L^p de $z' \mapsto \frac{1}{|z'|}$ sur $\Omega \cap \{|z'-z_0| > \delta_2\}$

pour $p=2$: cela donne $\int_{\Omega \cap \{|z'-z_0| > \delta_2\}} \frac{1}{|z'-z_0|^2} dx dy$ que la norme $L^2(\Omega)$ en z du 2^e terme est $\leq C \left(\int_{\Omega \cap \{|z'-z_0| > \delta_2\}} \frac{1}{|z'-z_0|^2} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} = O(|\log \delta|^{\frac{1}{2}})$

• Enfin, on estime $F(z) = \int_{|z'-z_0| < S} |\bar{T}(z, z')| \cdot |\eta_S(z')| \cdot |(\chi b)(z')| dx dy'$

On a choisi $\omega(z)$ de sorte que $b(z_0) = 0$ et si $b \in C^1$ on a $|(\chi b)(z)| = O(|z-z_0|)$

la norme $L^2(\Omega)$ en z de cette fonct^o est majorée par $C \|\eta_S \chi b\|_{L^2}$

En utilisant que la convolut^o par $\frac{1}{|z'|} : L^2 \rightarrow L^2$, on obtient donc $\left(\int |F(z)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} = O(S^2)$.

Conclusion : On prend donc $S = h$ et q arbitrairement proche de 2 au dessus, cela prouve le Lemme. (En fait le premier terme peut aussi être

majoré par $O(h)$ en utilisant que $\frac{1}{|z'|}$ convolée par une fonct^o L^2_{comp} est de norme $L^2(\Omega)$ bornée par $C \times$ norme L^2 de la fonct^o ; ici $\frac{1}{\delta_2} \chi_{\{\delta_2 < |z'-z_0| < S\}}$
 $\hookrightarrow$ On obtient donc en fait $O_L(h |\log h|^{\frac{1}{2}})$ pour r_{11} si on veut être précis. $\square$

Corollaire : Si $r_1 = r_{11} + r_{12}$, alors il existe $r_2 \in L^2(\Omega)$ tel que $(\Delta + V)(e^{\frac{\phi}{2}}(1 + r_1 + r_2)) = 0$, et $\|r_2\|_{L^2(\Omega)} = O(h^{\frac{3}{2}-\varepsilon})$ $\forall \varepsilon > 0$

Preuve : On a $e^{-\frac{\phi}{2}}(\Delta + V)(e^{\frac{\phi}{2}}(1 + r_1)) = \Delta(r_{12}) + V r_1$

On a vu que $\|r_{12}\|_{H^1} = O(h)$, en fait $\frac{r_{12}}{h}$ est indépendant

de h et S : $\forall \varepsilon \in H^1(\Omega)$, $T(\varepsilon) \in H^2(\Omega)$ donc $\|\Delta(r_{12})\|_{L^2} = O(h)$

mais de plus $\|V r_1\|_{L^2} = O(h^{1-\varepsilon})$, $\forall \varepsilon > 0$ donc par Carleman,

il existe $n_2 \in L^2$, $\|n_2\|_{L^2} = o(h^{\frac{3}{2}-\epsilon})$ tel que

$$e^{\frac{i\psi}{h}}(\Delta + V)(e^{\frac{i\psi}{h}}(n_2)) = -\Delta(n_2) - Vn_1 \quad \square$$

Théorème : Si V_1, V_2 sont deux potentiels dans $H^{1+\alpha}(\Omega)$, $\alpha > 0$, alors si
 $W_{V_1} = W_{V_2}$, on a $V_1 = V_2$.

Preuve : on prend deux solutions optiques géométriques complexes

$$(\Delta + V_1)u_h^{(1)} = 0, \quad (\Delta + V_2)u_h^{(2)} = 0 \quad \text{avec phase } (z-z_0)^2.$$

$$u_h^{(1)} = e^{\frac{i\psi}{h}}(1 + n_1^{(1)} + n_2^{(1)}), \quad u_h^{(2)} = e^{\frac{i\psi}{h}}(1 + n_1^{(2)} + n_2^{(2)})$$

De l'identité intégrale, on déduit :

$$\int_{\Omega} (V_1 - V_2) u_h^{(1)} \bar{u}_h^{(2)} = 0 = \int_{\Omega} e^{\frac{2i\psi}{h}} \underbrace{(V_1 - V_2)}_{=: V} dxdy + \int_{\Omega} e^{\frac{2i\psi}{h}} (n_1^{(1)} + n_1^{(2)}) V + o(h)$$

$$(1) \quad \left[\int_{\Omega} e^{\frac{2i\psi}{h}} V dxdy = C_0 V(z_0) h + o(h) \right]$$

en effet, on écrit $V(z) = V(z_0)\chi(z) + \tilde{V}(z)$ où $\chi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$

avec $\chi = 1$ près de 0. La phase stationnaire nous donne

$$\int_{\Omega} e^{\frac{2i\psi}{h}} V(z_0)\chi(z) dxdy = C_0 V(z_0) h + o(h^2)$$

Si $V(z) \in W^{1,p}(\bar{\Omega})$ avec $p > 2$, on a $|\tilde{V}(z)| \leq C|z-z_0|^\alpha$ pour un $\alpha = 1 - \frac{2}{p}$
 et $|\partial \tilde{V}(z)| \in L^p(\Omega)$.
 car $W^{1,p} \subset C^\alpha$

Or par intégration par parties on obtient (car $\tilde{V}|_{\partial\Omega} = 0$)

$$\int_{\Omega} e^{\frac{2i\psi}{h}} \tilde{V}(z) = - \int_{\Omega} \frac{h}{2i} e^{\frac{2i\psi}{h}} \partial_{\bar{z}} \left(\frac{\tilde{V}(z)}{\partial_{\bar{z}} \psi} \right) dxdy$$

on a enfin $\partial_{\bar{z}} \tilde{V} \cdot \frac{1}{\partial_{\bar{z}} \psi} \in L^1$ car $\frac{1}{\partial_{\bar{z}} \psi} \in L^q$ pour $q < 2$ et $\partial_{\bar{z}} \tilde{V} \in L^p$

Riemann-Lebesgue : $\int_{\Omega} e^{\frac{2i\psi}{h}} f \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ si $f \in L^1$. (argument de densité)
 de C_0^∞

Ceci montre (1). car $\frac{\tilde{V}(z)}{(\partial_{\bar{z}} \psi)^2} \in L^1$ en utilisant $|\tilde{V}(z)| \leq C|z-z_0|^\alpha$, $\alpha > 0$

$$(2) \quad \left[\int_{\Omega} e^{\frac{2i\psi}{h}} (n_1^{(1)} + n_1^{(2)}) V dxdy = o(h) \text{ quand } h \rightarrow 0 \right]$$

déjà les termes $n_{n_2}^{(1)}$ et $n_{n_2}^{(2)}$ sont de la forme

$h \times$ une fonction dans L^2 indépendante de h

donc par Riemann-Lebesgue on a $o(h)$ contribution.

$H^{1+\alpha} \subset C^\alpha$
 en dim 2
 $H^{\alpha} \subset L^{\frac{2}{1-\alpha}}$

• il reste les termes avec $\lambda_{11}^{(1)}$ et $\lambda_{11}^{(2)}$, qui sont similaires.
 regardons $\lambda_{11}^{(1)} = e^{-2i\frac{y}{h}} \bar{T}(e^{2i\frac{y}{h}} \chi b)$, donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{2i\frac{y}{h}} \lambda_{11}^{(1)} V dx dy &= \int_{\Omega} V \bar{T}(e^{2i\frac{y}{h}} \chi b) dx dy \\ &= \int_{\Omega} \bar{T}^*(V) e^{2i\frac{y}{h}} (\chi b) dx dy \end{aligned}$$

où $\bar{T}^*(z, z') = \bar{T}(z', z)$ comme noyau intégral. $\bar{T}^*(V) \in H^{2+\alpha}$ si $V \in H^{1+\alpha}$,

$\chi b \in H^{2+\alpha}$ donc on peut encore appliquer un argument comme dans (4)

et puisque $\chi b(z_0) = 0$, on a $\int_{\Omega} \bar{T}^*(V) e^{2i\frac{y}{h}} \chi b = o(h)$

Ceci achève la preuve et montre que $V(z_0) = 0$

□

③ Le Théorème de Lassar-Uhlmann :

Th. Si M_1, M_2 sont deux surfaces de Riemann à bord commun N ,
 si $\mathcal{W}_{g_1} = \mathcal{W}_{g_2}$ alors $\exists \varphi: M_1 \rightarrow M_2$ difféo et $\varphi \in C^\infty$ tels que
 $\varphi^* g_2 = e^{2\varphi} g_1$, $\varphi|_N = \text{Id}$, $\varphi|_{\partial} = \text{Id}$

Rappel: on a vu que les fonctions de Green $R_1(z, z')$ et $R_2(z, z')$ sont analytiques en z, z' (hors de la diagonale) dans les cartes isothermes / complexes.

• Soit $p \in \mathbb{N}$, $\psi_1: U_1 \rightarrow B$ en U_i voisinage de $y_1 p$ dans M_i
 $\psi_2: U_2 \rightarrow B$

er $B = \{x^2 + y^2 < 1, y \geq 0\}$ 

er $\varphi_i(p) = 0$, φ_i hat kein Bothenmes, ie $\varphi_i(y) = e^{2\pi i |z|^2}$

• Si z' fixé dans B , on a vu que si $\tilde{R}_i(z, z') = R_i(\psi_i^{-1}(z), \psi_i^{-1}(z'))$

— $\tilde{R}_1(z, z') = \tilde{R}_2(z, z') \quad \forall z \in B \quad (*)$

On considère l'application pour $i=1,2$

$$g_i: M_i \rightarrow L^2(B)$$

On a clairement $g_1(\bar{v}_1, \bar{z}) = g_2(\bar{v}_2, \bar{z})$ d'après $(*)$ si $z \in B$

et si g_i est vue à valeurs dans $H^{-1}(B)$, on a $g_i \in C^1$.

Can $R_i(z, z')$ be of the type $\log(|z - z'|) + C^\infty(M_i \times M_i)$ locally?

Lemme 1: $\left\{ \begin{array}{ccc} \text{Dg}_i(z): T_z M_i & \rightarrow & H^1(B) \\ \downarrow \nu & & \downarrow \\ & \rightarrow & d_{\mathbb{R}} \text{Ri}(z, \psi_i^{-1}(\cdot)) \cdot \nu \end{array} \right.$
est injective $\forall z \in \overset{\circ}{M}_i$.

preuve: Si $n \in \text{Ker } Dg_i(z)$, $z' \in M_i \rightarrow d_z R_i(z, z') \cdot n$
est analytique en z' donc par prolongement

unique $\mathbb{P}$ s'annule sur M_i , Ceci contredit l'asymptotique

$$R_i(z, z') = \log(|z - z'|) + C^\infty \text{ près de } z' = z. \quad \square$$

Lemme 2: g_i est un plongement.

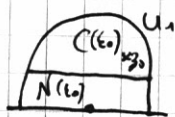
preuve: montrons que g_i est injectif.

Si $g_i(z) = g_i(z_0)$ avec $z, z_0 \in M_i$,
 alors par plongement unique, comme $R_i(z, z') = R_i(z_0, z')$
 on a $R_i(z, z') = R_i(z_0, z')$, $\forall z' \in M_i$ et
 en faisant $z \rightarrow z'$, l'asymptotique dit que $z_0 = z' \quad \square$.

[Proposition: $g_1(M_1) = g_2(M_2)$ et $g_2^{-1} \circ g_1 : \dot{M}_1 \rightarrow \dot{M}_2$ est une transformation conforme.]

preuve: Montrons que $g_1(M_1) \subset g_2(M_2)$.

Soit $\varepsilon_0 > 0$ petit, de sorte que $C(\varepsilon_0) = \{z \in M_1, d_{M_1}(z, \partial M_1) > \varepsilon_0\}$
 est connexe, et $N(\varepsilon_0) = M_1 \setminus C(\varepsilon_0)$



Soit $z_0 \in U_1 \cap C(\varepsilon_0)$ en prenant ε_0 petit

Soit B_1 le plus grand ouvert connexe contenant z_0 tq
 $g_1(z_0) \in g_2(M_2)$ pour tout $z \in B_1$, $B_1 \subset C(\varepsilon_0)$

On définit $J = g_2^{-1} \circ g_1 : B_1 \rightarrow M_2$ et $D_1 \subset B_1$ le plus
 grand ouvert où J est une application conforme.

z_1 le point le plus proche de z_0 dans $C(\varepsilon_0) \setminus D_1$, $z_1 \in \partial D_1$

• On a: $\exists z_2 \in \dot{M}_2$ tq $g_2(z_2) = g_1(z_1)$, $\exists p_2 \in D_1$ tq
 $p_2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} z_1$, $J(p_2) \xrightarrow{t \rightarrow 0} z_2$



~~soit~~

Soit $U := \{z \in \dot{M}_1; \exists z' \in \dot{M}_2, g_2(z') = g_1(z)\}$

$\rightarrow$ on a $U_1 \subset U$

$\rightarrow$ U fermé dans $\dot{M}_1$: Si $z_j \rightarrow z \in \dot{M}_1$, $z_j \in U$, $\exists z'_j \in \dot{M}_2$ tq
 $g_2(z'_j) = g_1(z_j)$ et $g_1(z_j) \rightarrow g_1(z)$ par continuité
 mais z'_j a un pt d'adhérence dans M_2 : z' .
 $\begin{cases} \text{Si } z' \in \dot{M}_2 \text{ alors } g_2(z') = g_1(z) \\ \text{Si } z' \in \partial M_2 \text{ alors } g_2(z') = 0 \end{cases}$ mais dans ce cas $g_1(z) = 0$,
 ce qui implique $z \in \partial M_1$, contradiction. ($g_1(z) \neq 0$ ds $H^{-2}(B)$ si $z \notin \partial M_1$)

→ U fermé.

U est ouvert? Soit $z_0 \in U$ on va trouver un voisinage de z_0 dans U en appliquant le théorème des fonctions implicites.

Soient $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2$ les images $g_1(\tilde{M}_1), g_2(\tilde{M}_2)$.

On a $g_1(z_0) = g_2(z'_0) = u$. $z'_0 \in \tilde{M}_2, z_0 \in \tilde{M}_1$:

On prétend que $T_u \tilde{M}_1 = T_u \tilde{M}_2$

$R_1(z_0, \tilde{z}) = R_2(z'_0, \tilde{z}) \quad \forall \tilde{z} \in B$

$\Rightarrow R_1(z_0, \tilde{z}) = R_2(z'_0, \psi_{z_0}^{-1}(\tilde{z})) \quad \forall \tilde{z} \in U_1$

Si U n'est pas M_1 , alors il a un pt de bord g_1 qui n'est pas dans ∂M_1 et $d(\tilde{u}, z_1) = 0$; par continuité de dg_1, dg_2 on a $g_1(z_1) = g_2(z_2)$ $z_2 \in \tilde{M}_2$
 et $dg_1(z_1) = dg_2(z_2)$
 car U est fermé $(z_j \rightarrow z_1, z'_j \rightarrow z_2, dg_1(z_j) \rightarrow dg_1(z_1))$
 $z_j \in U, z'_j \in \tilde{M}_2$

donc on a avec $u = g_1(z_1) = g_2(z_2)$,

$T_u \tilde{M}_1 = T_u \tilde{M}_2$ car les différentielles coïncident.

soit $V = T_u \tilde{M}_1 = T_u \tilde{M}_2 \subset H^2(B)$.

$P: H^2(B) \rightarrow V$ la projectⁿ $\perp$ ds le Hilbert.

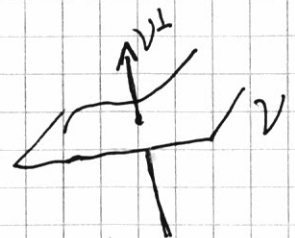
Soit $P \circ g_j: M_j \rightarrow V$

$D(P \circ g_j)(z_j) = P(dg_j)(z_j)$ est surjective par constructⁿ et injective donc inversible

Comme $P \circ g_j$ est analytique, le théorème d'inverse locale dit que $\exists H_j: \tilde{U} \rightarrow M_j$ où $\tilde{U}$ voisinage de u dans V analytique telle que

$$P \circ g_j \circ H_j(w) = w$$

donc $g_j \circ H_j: \tilde{U} \subset V \rightarrow V \oplus V^\perp$
 $w \mapsto (w, \underbrace{(1-P) \circ g_j \circ H_j(w)}_{\bullet Q_j: \tilde{U} \rightarrow V^\perp})$



localement $\tilde{M}_j$ est le graphe de Q_j pris de u , Q_j analytique
 les graphes coïncident dans un ouvert de $\tilde{U}$ par hypothèse sur z_2
 donc $Q_1 = Q_2$ dans $\tilde{U}$ par analyticit^e de Q_j

donc z_1 a un voisinage ouvert dans $U \Rightarrow U \text{ ouvert} = \dot{M}_1$.

Cela définit bien $J = g_2^{-1} \circ g_1$ de $\dot{M}_1 \rightarrow \dot{M}_2$, C^1 bijective
 et en fait on a vu que $\forall z_0 \in \dot{M}_1$, on a

$$g_1 \circ h_2 = g_2 \circ h_1 \text{ sur un ouvert voisinage de } g_1(z_0), \text{ i.e.}$$

$$\begin{cases} R_1(h_1(w), \psi_1^{-1}(z')) = R_2(h_2(w), \psi_2^{-1}(z')) & \forall z' \in B \\ R_1(z, \psi_1^{-1}(z')) = R_2(h_2 \circ h_1^{-1}(z), \psi_2^{-1}(z')) & \text{si } z \in \text{voisinage de } z_0 \end{cases}$$

$$J = g_2^{-1} \circ g_1 = h_2 \circ h_1^{-1} \text{ sur un voisinage de } z_0, \text{ réelle analytique}$$

on sait aussi que

$$R_1(z, z') = R_2(h_2 \circ h_1^{-1}(z), \psi_2^{-1} \circ \psi_1(z')) \quad \text{si } z' \in U_1$$

$$\hookrightarrow R_1(z, z') = R_2(\psi_2^{-1} \circ \psi_1(z), \psi_2^{-1} \circ \psi_1(z')) \quad \text{si } z, z' \in U_1$$

donc

$$\boxed{R_1(z, z') = R_2(Jz, Jz')} \quad \forall z, z' \in U_1$$

l'égalité ci-dessus s'étend à $M \times M$.

J étant analytique

Lemme : J est conforme.

preuve : regarder l'asymptotique de $R_i(z, z')$ quand $z \rightarrow z'$

$$R_i(z, z') = \frac{1}{2\pi} \log(|z - z'|) + F_i(z') + O(|z - z'|) \quad (\text{des les cartes Riemann}).$$

$$J(z) = J(z') + (DJ(z')) \cdot v + O(|v|^2)$$

$$z_t = z' + vt, \quad v \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{1}{2\pi} \log |J(z) - J(z')| + F_2(J(z)) = \frac{1}{2\pi} \log |z - z'| + F_2(z')$$

$$\frac{1}{2\pi} \log (|(DJ(z')) \cdot v| + O(t^2)) + F_2(J(z)) = \frac{1}{2\pi} \log (|v| + O(t^2)) + F_2(z')$$

$t \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \log |DJ(z') \cdot v| + F_2(J(z')) = \frac{1}{2\pi} \log |v| + F_2(z').$$

$$|DJ(z') \cdot v| = e^{2\pi(F_2(z') - F_2(J(z')))} |v| \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow J \text{ conforme} \quad \square.$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \log |DJ(z') \cdot v| + F_2(J(z')) = \frac{1}{2\pi} \log (|J(z') - \overline{J(z')}|) \\ & = \frac{1}{2\pi} \log |v| + F_2(z') - \frac{1}{2\pi} \log (|z' - \overline{z'}|) \end{aligned}$$

$$|DJ(z') \cdot v| = e^{2\pi(F_2(z') - F_2(J(z')))} \frac{|J(z') - \overline{J(z')}|}{|z' - \overline{z'}|} |v|$$

