

1.1 *Tn-mitan perusominaisuudet.* Todista, että numeroituvan otosavaruuden mielivaltaiselle tn-mitalle \mathbb{P} pätee:

- (a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
- (b) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
- (c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$,
- (d) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$,
- (e) $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$,
- (f) $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

1.2 *Todennäköisyysjakaumia.* Osoita, että P on todennäköisyysfunktio otosavaruudella Ω , ja anna esimerkki ilmiöstä, jota voidaan mallintaa kyseisen todennäköisyysfunktion määräämän jakauman avulla, kun

- (a) $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$, $p \in [0, 1]$ ja kaikilla $\omega \in \Omega$

$$P(\omega) = (1 - p)^{\omega-1} p. \quad (\text{Geometrisen jakauma})$$

- (b) $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\lambda > 0$ ja kaikilla $\omega \in \Omega$

$$P(\omega) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^\omega}{\omega!}. \quad (\text{Poisson-jakauma})$$

- (c) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$, missä $N \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $\omega \in \Omega$

$$P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}. \quad (\text{Tasajakauma})$$

Voidaanko tasajakauma määritellä numeroituvasti äärettömässä joukossa?

1.3 *Tasajakaumien tulo.* Olkoon tn-funktio μ_1 äärellisen joukon S_1 tasajakauma ja tn-funktio μ_2 äärellisen joukon S_2 tasajakauma. Onko $\mu_1 \times \mu_2$ tällöin myös tasajakauma? Todista väite oikeaksi tai anna vastaesimerkki.

Jatkuu seuraavalla sivulla...

1.4 Summaestimaatti. Olkoon \mathbb{P} äärellisen otosavaruuden Ω tn-mitta.

(a) Todista, että mielivaltaisille tapahtumille $A_1, \dots, A_k \subset \Omega$ pätee

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i). \quad (1)$$

(b) Anna esimerkki tapauksesta, missä (1) pätee yhtälönä.

(c) Anna esimerkki tapauksesta, missä epäyhtälö (1) on aito.

1.5 Bayesin kaava. Osoita, että jos \mathbb{P} on todennäköisyysmitta ja $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$, niin

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B | A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

1.6 Pikavippi. Pikavippifirma Strata myöntää Pekalle 150 euron lainan ja Antille 200 euron lainan 50% korolla. Oletetaan, että kumpikin saattaa yhtä suurella todennäköisyydellä

- (i) maksaa lainan takaisin korkoineen,
- (ii) maksaa lainan, muttei korkoja tai
- (iii) jättää sekä lainan että korot maksamatta.

Laske Stratan tuottojakauma tarkasti perustellen. Millä todennäköisyydellä lainat tuottavat Stratalle voittoa? Entä tappiota? Minkä lisäoletuksen joudut tekemään laskeaksesi jakauman?