Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATA280 Stokastiikan perusteet

Laskuharjoitus 2
22.9.2014
H. Seppälä / E. Laukkarinen

2.1 *Kurssin läpäisy.*

(a) Oletetaan, että kurssin viidellä opiskelijalla on sama lähtötaso (ja he ovat toisistaan riippumattomia). Oletetaan lisäksi, että laskuharjoituksia tekemättömistä keskimäärin puolet läpäisee kurssin, eikä kukaan viidestä tee laskuharjoituksia. Millä todennäköisyydellä kaikki viisi läpäisee kurssin?

(b) Todista (a)-kohtaa vastaava yleisempi tulos: Olkoot $X_1, ..., X_n$ riippumattiomia reaaliarvoisia satunnaismuuttujia äärellisellä otosavaruudella Ω, joka on varustettu todennäköisyysmitalla $\mathbb{P}$. Osoita, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\big(\min\{X_i,\ i = 1, ..., n\} \geq x\big) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \geq x).$$

Mitä ovat X_i:t, Ω ja $\mathbb{P}$ (a)-kohdassa?

2.2 *Satunnaisbittien summa ja tulo.* Olkoot $\theta_1, \ldots, \theta_n$ riippumattomia Bernoulli-jakautuneita satunnaismuuttujia parametrilla $p \in (0, 1)$, eli $\mathbb{P}(\theta_i = 1) = p$ ja $\mathbb{P}(\theta_i = 0) = 1 - p$ kaikilla i. Selvitä seuraavien satunnaismuuttujien jakaumat:

(a) $X = \theta_1 + \theta_2$,

(b) $Y = \theta_1\theta_2$,

(c) $Z = \theta_1 + \cdots + \theta_n$,

(d) $W = \theta_1 \cdots \theta_n$.

(Vihje: rekursiokaavasta $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, kaikilla $k = 1, ..., n-1$, voi olla apua.)

2.3 *Kolmikon ja parien riippumattomuus.* Olkoot X_1, X_2, X_3 diskreetillä tn-avaruudella (Ω, P) määriteltyjä satunnaisia kokonaislukuja. Ovatko seuraavat väittämät totta vai tarua? Todista väittämät oikeiksi tai perustele ne vääriksi antamalla vastaesimerkki.

(a) Jos satunnaismuuttujat X_1, X_2, X_3 ovat keskenään riippumattomat, niin tällöin myös satunnaismuuttujat X_i, X_j ovat keskenään riippumattomat kaikilla $i \neq j$.

(b) Jos X_i, X_j ovat keskenään riippumattomat kaikilla $i \neq j$, niin tällöin myös X_1, X_2, X_3 ovat keskenään riippumatomat.

Jatkuu seuraavalla sivulla...

2.4 Olkoot $X : \Omega \to S$ ja $Y : \Omega \to T$ satunnaismuuttujia. Oletetaan, että $\mathbb{P}(X = s) > 0$ kaikilla $s \in S$. Todista, että X ja Y ovat riippumattomat jos ja vain jos

$$\mathbb{P}(Y = t \,|\, X = s) \;=\; \mathbb{P}(Y = t)$$

kaikilla $s \in S$ ja $t \in T$.

2.5 *Ehdolliset todennäköisyydet.* Tarkastellaan ensimmäisten laskuharjoitusten tehtävää 6. Oletetaan, että Pekan ja Antin suorittamat maksut ovat riippumattomia toisistaan ja olkoot satunnaisluvut X ja Y heidän takaisin maksamansa summat. Muotoile X:n ja Y:n avulla esimerkkejä tapahtumista A ja B, missä

(a) $\mathbb{P}(A \,|\, B) < \mathbb{P}(A)$,

(b) $\mathbb{P}(A \,|\, B) = \mathbb{P}(A)$,

(c) $\mathbb{P}(A \,|\, B) > \mathbb{P}(A)$.