

**4.1** *Pikavippi.* Tarkastellaan ensimmäisten laskuharjoitusten tehtävää 6. Laske pikavippifirma Stratan tuoton

- (a) ehdollinen odotusarvo ehdolla, että Antti maksaa lainansa korkoineen.
- (b) ehdollinen odotusarvo ehdolla, että kumpikaan ei jätä lainaa kokonaan maksamatta
- (c) keskihajonta.

**4.2** *Indikaattorisatunnaismuuttuja.* Diskreetin tn-avaruuden  $(\Omega, P)$  tapahtuman  $A \subset \Omega$  indikaattori on  $\{0, 1\}$ -arvoinen satunnaismuuttuja

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kun } \omega \in A, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

- (a) Selvitä  $1_A$ :n jakauma.
- (b) Laske  $1_A$ :n odotusarvo ja varianssi.
- (c) Selvitä satunnaismuuttujan  $Z = 1_{A_1} + \dots + 1_{A_n}$  jakauma, kun oletetaan, että  $1_{A_1}, 1_{A_2}, \dots, 1_{A_n}$  ovat riippumattomat ja  $\mathbb{P}(A_i) = p$  kaikilla  $i = 1, \dots, n$ .
- (d) Laske  $Z$ :n odotusarvo ja varianssi.

**4.3** Olkoot  $X, X_1, \dots, X_n$  samoin jakautuneita riippumattomia satunnaismuuttujia ja määritellään *otosvarianssi* kaavalla

$$v = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

missä  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  on *otoskeskiarvo*. Osoita, että

$$\text{var}(\bar{X}) = \frac{\text{var}(X)}{n} \quad \text{ja} \quad \mathbb{E}[v] = \text{var}(X).$$

*Jatkuu seuraavalla sivulla...*

**4.4** *Suurten lukujen laki ei aina toteudu.* Tarkastellaan kahta riippumatonta kokoelmaa satunnaismuuttujia, joille pätee

- $\{X_1, X_2, \dots\}$  ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, ja  $\mathbb{E}(X_1) = 1$ .
- $\{Y_1, Y_2, \dots\}$  ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, ja  $\mathbb{E}(Y_1) = 2$ .

Heitetään aluksi kolikkoa ja määritellään

$$S_n = \begin{cases} X_1 + X_2 + \dots + X_n, & \text{jos saadaan kruuna,} \\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, & \text{jos saadaan klaava.} \end{cases}$$

Näytä, että

- $\mathbb{E}(S_n/n) = 3/2$ .
- $\mathbb{P}(|S_n/n - 3/2| > 1/4)$  ei suppene nolnaan kun  $n$  kasvaa.
- Onko ylläoleva havainto ristiriidassa suurten lukujen lain kanssa?

**4.5** Olkoot  $X$  ja  $Y$  satunnaismuuttujia, joilla on äärelliset odotusarvot. Osoita, että

- $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$  ja
- $\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$ ,

kun  $a, b \in \mathbb{R}$ .