Jyväskylän yliopisto	**Laskuharjoitus 5**
Matematiikan ja tilastotieteen laitos	20.10.2014
MATA280 Stokastiikan perusteet	H. Seppälä / E. Laukkarinen

5.1 *Valtterin rulettipeli.* Valtteri pelaa 300 kierrosta rulettia panostaen kullakin kierroksella yhden euron pienille luvuille (1–18). Valtterin alkupääoma on $V_0 = 300$ euroa. Merkitään Valtterin pelitilin arvoa t:n pelikierroksen jälkeen symbolilla V_t.

(a) Olkoon $U_1, \ldots, U_{300}$ riippumattomia tasajakautuneita satunnaismuuttujia joukossa $S = \{0, 1, \ldots, 36\}$. Määrittele funktio f, jonka avulla pelitilin arvo t:n pelikierroksen jälkeen voidaan esittää muodossa

$$V_t = V_0 + \sum_{s=1}^{t} f(U_s).$$

(b) Mikä on satunnaismuuttujan V_{300} arvojoukko?

(c) Laske a)-kohdan tulosta apuna käyttäen odotusarvo $\mathbb{E}V_{300}$.

(d) Olkoon θ_s tapahtuman $\{U_s \in [1, 18]\}$ indikaattorisatunnaismuuttuja. Perustele, miksi θ_s noudattaa $\mathrm{Ber}(p)$-jakaumaa jollain p ja laske p:n arvo.

(e) Määrittele funktio g, jonka avulla pelitilin arvo t:n pelikierroksen jälkeen voidaan esittää muodossa

$$V_t = V_0 + g\left(\sum_{s=1}^{t} \theta_s\right).$$

(f) Todista e)-kohdan tulosta apuna käyttäen, että

$$\mathbb{P}\left(\frac{V_{300} - V_0}{V_0} \geq 0.1\right) = \sum_{k=j}^{300} \binom{300}{k} p^k (1-p)^{300-k}$$

eräällä j:n arvolla ja määritä j.

(Harjoitusten 4 tehtävästä 2 voi olla apua.)

5.2 *Binomijakauma.* Olkoon X binomijakautunut satunnaisluku parametreilla $p \in (0, 1)$, $n \geq 2$

(a) Laske X:n todennäköisyydet generoiva funktio G_X.

(b) Mille t:n arvoille $G_X(t)$ on määritelty?

(c) Laske X:n odotusarvo G_X:n avulla.

(d) Laske X:n varianssi.

Jatkuu seuraavalla sivulla. . .

5.3 *Poisson-jakauma.* Olkoon X Poisson-jakautunut satunnaisluku parametrilla $\lambda > 0$, eli

$$\mathbb{P}(X = k) \;=\; e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

(a) Laske X:n todennäköisyydet generoiva funktio G_X.

(b) Mille t:n arvoille $G_X(t)$ on määritelty?

(c) Laske X:n odotusarvo G_X:n avulla. (Harjoituksen 3 tehtävässä 2 laskettiin odotusarvo määritelmän avulla.)

(d) Laske X:n varianssi.

5.4 *Poisson-jakautuneiden satunnaismuuttujien summa.* Olkoot X ja Y riippumattomia Poisson-jakautuneita satunnaismuuttujia parametreilla λ_1 ja λ_2. Osoita, että $X+Y$ on Poisson-jakautunut.

5.5 *Satunnaissumma.* Olkoot $N, X_1, X_2, ...$ riippumattomia Z_+-arvoisia satunnaismuuttujia, missä $X_1, X_2, ...$ ovat samoin jakautuneita.

(a) Laske satunnaissumman $M = \sum_{i=1}^{N} X_i$ odotusarvo.

(b) Osoita, että satunnaissumman varianssille pätee

$$\mathrm{var}(M) = \mathrm{var}(N)\big(\mathbb{E}[X]\big)^2 + \mathrm{var}(X)\mathbb{E}[N].$$