Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATA280 Stokastiikan perusteet

Laskuharjoitus 6
27.10.2014
H. Seppälä / E. Laukkarinen

6.1 *Haarautumisprosessin sukupuutto.* Tarkastellaan haarautumisprosessia, missä kukin yksilö toisista riippumatta saa nolla jälkeläistä tn:llä 1/8, yhden jälkeläisen tn:llä 1/2, ja kaksi jälkeläistä tn:llä 3/8.

(a) Laske jälkikasvun lukumäärän todennäköisyydet generoiva funktio $G_X(t)$.

(b) Etsi yhtälön $G_X(t) = t$ ratkaisut.

(c) Laske todennäköisyys, että populaatio kuolee sukupuuttoon.

Tehtävät 6.2–6.5 ovat vanhoja tenttitehtäviä.

6.2 Anna esimerkki tosimaailman satunnaisilmiöstä (poislukien kolikonheitto, noppa- ja uhkapelit), jota voi mallintaa (a) binomijakaumalla, (b) geometrisella jakaumalla, (c) kolmen riipumattoman Bernoulli-jakautuneen satunnaismuuttujan maksimilla. Perustele huolellisesti, miksi juuri kyseinen jakauma parhaiten sopii valitsemasi ilmiön malliksi.

6.3 Olkoot $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ riippumattomia tasajakautuneita satunnaislukuja joukossa $\{0, 1\}$. Ovatko seuraavien satunnaisvektoreiden komponentit riippuvia vai riippumattomia? Perustele vastauksesi huolellisesti.

(a) (X_1, X_2), missä $X_1 = 5\theta_1$ ja $X_2 = \theta_2 + \theta_3$.

(b) (Y_1, Y_2), missä $Y_1 = \theta_1 + \theta_3$ ja $Y_2 = \theta_2 + \theta_3$.

(c) (Z_1, Z_2, Z_3), missä $Z_1 = \theta_1$, $Z_2 = \theta_2$ ja $Z_3 = \theta_1\theta_2$.

6.4 Vahinkovakuutusyhtiöllä on 100 000 asiakasta, ja kunkin vakuutussopimuksen hinta on 360 euroa vuodessa. Tilastollisen arvion mukaan yhtiö joutuu vuoden kunakin kuukautena korvaamaan vahinkoja keskimäärin 2,5 M€ (miljoonaa euroa) arvosta, ja kuukausittaisen korvausmäärän keskihajonnaksi on arvioitu 1,8 M€. Vakuutusyhtiön kassassavaranto on tällä hetkellä 50 M€.

(a) Laske yhtiön odotettu kassavaranto vuoden kuluttua.

(b) Arvioi Chebyshevin epäyhtälön avulla todennäköisyyttä sille, että yhtiön kassavaranto on vuoden kuluttua 10 M€ negatiivinen.

Jatkuu seuraavalla sivulla...

6.5 Populaatiossa on kahdenlaisia soluja: A-tyypin solut voivat lisääntyä ja B-tyypin eivät. Kukin solu elää yhden aikayksikön. Kukin A-tyypin solu tuottaa elinkaarensa lopussa muista riippumatta nolla jälkeläistä todennäköisyydellä 1/3 ja kaksi jälkeläistä todennäköisyydellä 2/3. Jokainen uusi jälkeläinen on muista riippumatta tyyppiä A todennäköisyydellä 1/2. Solujen lukumäärät alkuhetkellä ovat $Z_0^{(A)} = 1$ ja $Z_0^{(B)} = 30$.

(a) Laske A- ja B-tyypin solujen lukumäärien odotusarvot $\mathbb{E}(Z_n^{(A)})$ ja $\mathbb{E}(Z_n^{(B)})$ ajanhetkellä $n = 2$.

(b) Laske $\mathbb{E}(Z_n^{(A)})$ ja $\mathbb{E}(Z_n^{(B)})$ mielivaltaisella ajanhetkellä $n \geq 0$.

(c) Määritä A-tyypin solun tuottamien A-tyypin jälkeläisten lukumäärän todennäköisyydet generoiva funktio.

(d) Mikä on todennäköisyys, että populaatio kuolee sukupuuttoon?