Jyväskylän yliopisto	**Laskuharjoitus 3**
Matematiikan ja tilastotieteen laitos	29.9.2014
MATA280 Stokastiikan perusteet	H. Seppälä / E. Laukkarinen

Vastaukset tulee palauttaa paperiversiona tai skannattuna pdf:nä oman harjoitusryhmän opettajalle viimeistään **ma 29.9.2014**.

3.1 (a) Oletetaan, että autot saapuvat liikennevaloristeykseen Poisson-jakauman mukaisesti. Kuinka monta autoa keskimäärin saapuu yhdessä aikayksikössä, jos Poisson-jakauman parametri on λ?

(b) Mikä on geometristä jakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan odotusarvo?

(Poisson-jakaumaa ja geometrista jakaumaa käsiteltiin 1. harjoitusten tehtävässä 2.)

Ratkaisu:

(a) Olkoon saapuneiden autojen lukumäärä $X : \Omega \to \{0, 1, 2, ...\}$. Koska X siis on ei-negatiivinen ja noudattaa Poisson-jakaumaa parametrilla λ, eli $P_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ kaikilla $k \in \{0, 1, 2, ...\}$, niin X:n odotusarvo on Lauseen 4.5 nojalla

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} kP_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.\end{aligned}$$

(b) Olkoon $Y : \Omega \to \{1, 2, 3, ...\}$ geometristä jakaumaa parametrilla $p \in (0, 1)$ noudattava satunnaismuuttuja, eli $P_Y(k) = p(1-p)^{k-1}$. Y on positiivinen, joten Lauseen 4.5 nojalla

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=1}^{\infty} kP_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}.$$

Tiedetään, että $\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = \frac{1}{p}$ kaikilla $p \in (0, 1)$, eli kyseinen potenssisarja suppenee kaikilla $p \in (0, 1)$. Koska $k(1-p)^{k-1} = -\frac{d}{dp}(1-p)^k$ kaikilla $k = 1, 2, ...,$ niin $\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$ suppenee ja lisäksi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} &= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dp}(1-p)^k = -\frac{d}{dp}\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k = -\frac{d}{dp}\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k \\ &= -\frac{d}{dp}\frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}.\end{aligned}$$

Siispä

$$\mathbb{E}[Y] = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Jos $p = 1$, niin $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p + 0 + 0 + ... = 1$.

3.2 Olkoot X ja Y kaksi riippumatonta satunnaismuuttujaa, joista kumpikin saa arvoja 0 ja 1 todennäköisyyksillä $\frac{1}{2}$. Osoita, että

$$\mathbb{E}\big[(X+Y)|X-Y|\big] = \mathbb{E}\big[X+Y\big]\mathbb{E}\big[|X-Y|\big],$$

mutta $X+Y$ ja $|X-Y|$ eivät ole riippumattomat.

Ratkaisu: Lasketaan ensin yhtälön molemmat puolet Lauseen 4.6 avulla: Olkoon $Z = (X, Y)$, jolloin $P_Z(s,t) = \frac{1}{4}$ kaikilla $(s,t) \in T = \{0,1\}^2$ ja $f : T =\to \{0,1\}$, $f(s,t) = (s+t)|s-t|$, $g : T \to \{0,1,2\}$, $g(s,t) = s+t$ ja $h : T \to \{0,1\}$, $h(s,t) = |s-t|$. Silloin

$$\mathbb{E}\big[(X+Y)|X-Y|\big] = \sum_{s,t\in T} f(s,t)P_Z(s,t) = \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{1}\sum_{t=0}^{1}(s+t)|s-t| = \frac{1}{4}(0+1+1+0) = \frac{1}{2}$$

ja samaan tapaan nähdään g:n ja h:n avulla, että

$$\mathbb{E}\big[X+Y\big] = 1 \qquad \text{sekä} \qquad \mathbb{E}\big[|X-Y|\big] = \frac{1}{2},$$

eli $\mathbb{E}\big[(X+Y)|X-Y|\big] = \frac{1}{2} = \mathbb{E}\big[X+Y\big]\mathbb{E}\big[|X-Y|\big]$.
Toisaalta $X+Y$ ja $|X-Y|$ eivät ole riippumattomia, sillä

$$\mathbb{P}(X+Y=2,\ |X-Y|=1) = 0 \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \mathbb{P}(X+Y=2)\mathbb{P}(|X-Y|=1)$$

3.3 *Muunnosten odotusarvoja.* Olkoot X ja Y riippumattomia tasajakautuneita satunnaislukuja joukossa $\{-3,1,2\}$. Laske seuraavien satunnaislukujen odotusarvot:

(a) $aX+bY$

(b) XY

(c) X/Y

(d) X^Y

(e) $\sin(\pi/X)\cos(\pi/Y)$

Ratkaisu: Merkitään $S = \{-3,1,2\}$ ja havaitaan Lauseen 4.5 avulla, että

$$\mathbb{E}X = \sum_{s\in S} s\ P_X(s) = \sum_{s\in S} s\frac{1}{3} = 0$$

ja tietysti myös $\mathbb{E}Y = 0$.

(a) Lineaarisuuden perusteella $\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y = 0$.

(b) Koska X ja Y ovat riippumattomat, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y = 0$.

(c) Satunnaismuuttujan $1/Y$ odotusarvo on Lauseen 4.6 mukaan

$$\mathbb{E}\big[1/Y\big] = \sum_{s\in S}(1/s)\,P_Y(i) = \sum_{s\in S}\frac{1}{s}\frac{1}{3} = \left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{3} = \frac{7}{18}.$$

Nyt $X \perp\!\!\!\perp Y \implies X \perp\!\!\!\perp 1/Y$, joten $\mathbb{E}X/Y = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}(1/Y) = 0$.

(d) Merkitään $f(s,t) = s^t$. Tällöin Lauseen 4.6 mukaan

$$\mathbb{E}\big[X^Y\big] = \mathbb{E}\big[f(X,Y)\big] = \sum_{s\in S}\sum_{t\in S} s^t P_{(X,Y)}(s,t),$$

missä $P_{(X,Y)}$ on satunnaisvektorin (X,Y) yhteisjakauma. Koska $X \perp\!\!\!\perp Y$, pätee

$$P_{(X,Y)}(s,t) = P_X(s)P_Y(t) = \frac{1}{9}$$

kaikilla $(s,t) \in \{-3,1,2\}^2$. Näin ollen

$$\mathbb{E}X^Y = \frac{1}{9}\sum_{s\in S}\sum_{t\in S} s^t = 1\frac{1315}{1944}.$$

(e) Ensin lasketaan

$$\mathbb{E}\sin(\pi/X) = \frac{\sin(\pi/1)+\sin(\pi/2)+\sin(\pi/(-3))}{3} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ja

$$\mathbb{E}\cos(\pi/Y) = \frac{\cos(\pi/1)+\cos(\pi/2)+\cos(\pi/(-3))}{3} = \frac{1}{3}(-1+0+\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}.$$

Nyt $X \perp\!\!\!\perp Y \implies \sin(\pi/X) \perp\!\!\!\perp \cos(\pi/Y)$ ja näin ollen

$$\mathbb{E}\sin(\pi/X)\cos(\pi/Y) = \mathbb{E}\sin(\pi/X)\,\mathbb{E}\cos(\pi/Y) = -\frac{1}{18}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

3.4 *Odotusarvo todennäköisyyksien summana.* Olkoon $X : \Omega \to \mathbb{Z}_+$. Osoita, että

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X > n).$$

Ratkaisu: Koska X saa vain kokonaislukuarvoja, niin Lauseen 4.5 nojalla

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} kP_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq n+1) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X>n+1).\end{aligned}$$

3.5 *Pikavippi.* Tarkastellaan ensimmäisten laskuharjoitusten tehävää 6. Laske pikavippifima Stratan tuoton

(a) odotusarvo.

(b) ehdollinen odotusarvo ehdolla, että Antti maksaa lainansa korkoineen.

(c) ehdollinen odotusarvo ehdolla, että kumpikaan ei jätä lainaa kokonaan maksamatta

Ratkaisu: (a) Ensimmäisissä harjoituksissa nähtiin, että Stratan tuotto noudattaa tasajakaumaa joukossa

$$S = \{-350,\ -200,\ -150,\ -125,\ -50,\ 0,\ 75,\ 100,\ 175\},$$

joten odotusarvo on

$$\sum_{s\in S} s\mathbb{P}(s) = \frac{1}{9}(-350-200-150-125-50+0+75+100+175) = \frac{-575}{9} \approx -58.33.$$

(b) ja (c) Harjoituksissa 4.