STOKASTIIKAN PERUSTEET Harjoitus 6

6.1
$$\mathbb{P}(X=i) = \begin{cases} \frac{1}{8} & i=0 \\ \frac{1}{2} & i=1 \\ \frac{3}{8} & i=2 \end{cases}$$

(a) $G_X(t) = \sum_{k=0}^{2} t^k P_X(k) = t^0 \cdot \frac{1}{8} + t^1 \frac{1}{2} + t^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}$

(b) $G_X(t) = t \iff 3t^2 + 4t + 1 = 8t \iff 3t^2 - 4t + 1 = 0.$

$t = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ 1 \end{cases}$

(c) Populaation sukupuuton tn on G_X:n pienin kiintopiste välillä $[0,1]$, joka on $\eta = \frac{1}{3}$

6.2 (b) "Yritysten lukumäärä ennen ensimmäistä onnistumista/epäonnistumista"
Esim. montako tuotetta tehtaalla pitää tarkastaa ennen kuin löytyy ensimmäinen viallinen ($\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}p$, $k \geq 1$)

(a) Niiden vakuutusyhtiön asiakkaiden lukumäärä, jotka tekevät vahinkoilmoituksen vuoden aikana: Oletetaan, että asiakas tekee ilmoituksen tn:llä p ja, että asiakkaat ovat riippumattomia.

(c) Työhaastatteluun pääseminen.
Haet kolmea eri saman alan työpaikkaa eri yrityksissä. Saat kutsun kuhunkin työpaikkaan tn:llä p. Jos Θ_i on indikaattori, joka ilmaisee pääsetkö työpaikan i:n haastatteluun vai et, niin $\max(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$ ilmaisee pääsetkö jonkin työpaikan haastatteluun

6.3 $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ $\perp\!\!\!\perp$ $\Theta_i \sim tas\{0,1\}$

(a) $X_1 = 5\Theta_1$ ja $X_2 = \Theta_2 + \Theta_3$

Θ_1 ja vektori (Θ_2, Θ_3) ovat riippumattomat, joten $X_1 = f(\Theta_1) = 5\Theta_1$ ja $X_2 = g(\Theta_2, \Theta_3) = \Theta_2 + \Theta_3$ ovat riippumattomat

(b) (Y_1, Y_2), $Y_1 = \Theta_1 + \Theta_3$ ja $Y_2 = \Theta_2 + \Theta_3$

$\mathbb{P}(Y_1 = 0, Y_2 = 2) = 0$, mutta

$\mathbb{P}(Y_1 = 0) = \mathbb{P}(\Theta_1 = 0, \Theta_2 = 0) = \mathbb{P}(\Theta_1 = 0)\mathbb{P}(\Theta_2 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ja

$\mathbb{P}(Y_2 = 2) = \mathbb{P}(\Theta_1 = 1, \Theta_2 = 1) = \mathbb{P}(\Theta_1 = 1)\mathbb{P}(\Theta_2 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

eli

$\mathbb{P}(Y_1 = 0)\mathbb{P}(Y_2 = 2) = \frac{1}{16} \neq 0 = \mathbb{P}(Y_1 = 0, Y_2 = 2)$

(c) $Z_1 = \Theta_1$, $Z_2 = \Theta_2$, $Z_3 = \Theta_1\Theta_2$

$$\mathbb{P}(Z_1 = 0, Z_2 = 0, Z_3 = 0) = \mathbb{P}(\Theta_1 = 0, \Theta_2 = 0) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(Z_1 = 0) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Z_2 = 0) \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}(Z_3 = 0) = 1 - \mathbb{P}(Z_3 = 1) = 1 - \mathbb{P}(\Theta_1 = 1, \Theta_2 = 1)$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Siten

$$\mathbb{P}(Z_1 = 0)\mathbb{P}(Z_2 = 0)\mathbb{P}(Z_3 = 0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(Z_1 = 0, Z_2 = 0, Z_3 = 0)$$

6.4 $n = 100\,000$, $h = 360$ €

$\mathbb{E}[X_i] = 2{,}5$ M€ $\quad sd(X_i) = 1.8$ M€ $\Rightarrow var(X_i) = 3.24$ M€

Olk X vuosimenot, eli $X = \sum_{i=1}^{12} X_i$

(a) Tulot: 360 € · 100 000 = 36 M€

Odotetut menot: $\mathbb{E}[X] = 12\,\mathbb{E}[X_i] = 30$ M€

Odotettu kassavaranto vuoden päästä:

50 M€ + 36 M€ − 30 M€ = 56 M€

(b) Kassavaranto on 10 M€ negatiivinen, jos

50 M€ + 36 M€ − $X \leq -10$ M€, eli $X \geq 96$ M€.

Tällöin $X - \mathbb{E}[X] = 96$ M€ − 30 M€ = 66 M€.

CHEBYSHEV:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > 66) \leq \frac{var(X)}{66^2}$$

$$var(X) = var\left(\sum_{i=1}^{12} X_i\right) \overset{X_i:\text{t} \perp\!\!\!\perp}{=} 12 \cdot 3.24 = 3888,$$

joten

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > 66) \leq \frac{3888}{4356} \leq 0.009$$

Lisäksi $X \geq 0$, joten $\mathbb{E}[X] - X \leq 30 < 60$ ja siksi

$$\mathbb{P}(\text{kassavaranto} \leq -10\text{ M€}) = \mathbb{P}(X - \mathbb{E}X \geq 66)$$

$$= \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > 66) \leq 0.009 \quad (= 0.9\%)$$

6.5

Olk X^A A-tyypin solun tyyppiä A devien jälkeläisten lukumäärä

$$\mathbb{P}(X^A = 0) = \mathbb{P}(\text{ei jälkeläisiä}) + \mathbb{P}(2\ \text{B-jälkeläistä})$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(X^A = 1) = \mathbb{P}(2\ \text{jälkeläistä, tyyppiä A ja B})$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X^A = 2) = \mathbb{P}(2\ \text{A-jälkeläistä}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 6.5 $\quad \mathbb{E}[X] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

(a)

$$Z_2^{(A)} = \sum_{i=1}^{Z_1^{(A)}} X_{2,i}^{(A)} = \sum_{i=1}^{X_{1,1}^{(A)}} X_{2,i}^{(A)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Z_2^{(A)}] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{X_1^{(A)}} X_{2,i}^{(A)}\right] \overset{X_{1,1}^{(A)} \perp\!\!\!\perp X_{2,i}^{(A)}}{=} \mathbb{E}[X_{1,1}^{(A)}]\,\mathbb{E}[X^{(A)}] = \mathbb{E}[X^{(A)}]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

Koska B-tyypin solut eivät jakaannu, niin tarkastellaan ainoastaan A-tyypin solujen tyyppiä B olevia jälkeläisiä. Havaitaan, että $X^{(B)} \overset{(d)}{=} X^{(A)}$, joten

$$Z_2^{(B)} = \sum_{i=1}^{Z_1^{(A)}} X_{2,i}^{(B)} = \mathbb{E}[X^{(A)}]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

(b) $\mathbb{E}[Z_n^{(A)}] = (\mathbb{E}[X])^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ LAUSEEN 10.3 nojalla (kunhan tarkastetaan c) kohdassa, että $G_{X^{(A)}}$ on määritelty pisteessä $t_0 > 1$)

Samoin

$\mathbb{E}[Z_n^{(B)}] = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

(c) $G_{X^{(A)}}(t) = t^0 \cdot \frac{1}{2} + t^1 \cdot \frac{1}{3} + t^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(t^2 + 2t + 3)$

(d) Populaatio kuolee sukupuuttoon täsmälleen silloin kun A-tyypin solut kuolevat sukupuuttoon. Lasketaan A-tyypin solujen sukupuuton tn:

$$G_{X^{(A)}}(t) = t \iff \frac{1}{6}(t^2+2t+3) = t \iff t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Koska tngf:n pienin kiintopiste on 1, niin sukupuuton tn on $\eta = 1$