Approbatur 3, demo 1, ratkaisut

1.1. A sanoo: "Vähintään yksi meistä on retku". Tehtävänä on päätellä, mitä tyyppiä A ja B ovat.

Käydään kaikki vaihtoehdot läpi.

Jos A on rehti, niin B on retku, koska muuten A:n lausuma ei voi päteä. Tämä vaihtoehto on siis mahdollinen.

Jos A on retku, pätee A:n lausuman negaatio – retkuthan valehtelevat **aina**. Tämä tarkoittaa, että sekä A että B olisivat rehtejä, mikä on mahdotonta, sillä on oletettu, että A on rehti.

Näin ollen ainoa vaihtoehto on, että A on rehti ja B retku.

1.2. A sanoo: "Olemme molemmat samaa tyyppiä" ja B jatkaa: "Olemme eri tyyppiä". Tehtävänä on taas päätellä A:n ja B:n tyypit.

Jos A on rehti, niin B on A:n lausuman nojalla myös rehti. Mutta tämä on mahdotonta, koska tällöin myös B:n lausuma olisi totta, ja nämä lausumat ovat ristiriidassa keskenään.

Jos A on retku, niin A:n lausuman negaatio pätee. Tämä tarkoittaa, että A ja B ovat eri tyyppiä eli, koska A on retku, B on rehti. Tämä ei ole ristiriidassa B:n lausuman kanssa, joten vaihtoehto on mahdollinen – ja ainoa mahdollinen, koska edellä todetun nojalla vaihtoehto, jossa A olisi rehti, johtaa ristiriitaan.

Eli siis A on retku ja B rehti.

1.3. A sanoo: "Jos minä olen rehti niin B on rehti". Tyypit pitäisi taas päätellä.

Jos A on rehti, niin A:n lausuman nojalla myös B on rehti. Tämä vaihtoehto on mahdollinen.

Jos A on retku, niin A:n lausuman negaatio pätee. Yleisestä propositiologiikasta tiedetään, että implikaatio $P \to Q$ on epätosi täsmälleen silloin, kun P on tosi ja Q epätosi; "todesta ei koskaan seuraa epätotta." Näin ollen itse asiassa A:n on oltava rehti ja B:n retku. Tämä ei ole mahdollista, koska on oletettu, että A on retku. Siispä vaihtoehto "A on retku" ei ole mahdollinen. Vastaus on siis, että A ja B ovat molemmat rehtejä.

1.4. Tehtävän on luetella kaikki joukon $A = \{0, 1, 2, 3\}$ osajoukot ja selvittää, moniko näistä ei sisällä alkiota 2.

Tehdään tämä ihan raa'alla voimalla. Merkitään A:n osajoukkojen luokkaa (eli A:n niin sanottua **potenssijoukkoa**) symbolilla $\mathcal{P}(A)$. Nyt

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A) =& \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\} \\ & \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \\ & \{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{0,2,3\}, \{0,1,3\}, A\}\,.\end{aligned}$$

Jonkinlaisen tarkistuksen tässä voi tehdä muistamalla, että jos joukon A alkioiden lukumäärä on n, niin A:n potenssijoukon alkioiden lukumäärä on 2^n eli tässä tapauksessa $2^4 = 16$.

Edellä olevasta listauksesta voidaan helposti laskea, monessako joukoista ei sisällä alkiota 2. Näitä joukkoja on kahdeksan kappaletta; joukot ovat

$$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,3\}, \{1,3\}, \{0,1,3\}\,.$$

Perjantain toisessa demoryhmässä oli puhetta sen asian, että tyhjä joukko kuuluu minkä tahansa joukon potenssijoukkoon, perustelusta. Tämähän on asia, jota ei tarvitse muistaa vaan sen voi myös ihan määritelmien ja logiikan pelisääntöjen avulla ymmärtää. Olkoon tätä varten A mielivaltainen joukko. On osoitettava, että

$$\emptyset \in \mathcal{P}(A)$$

eli että

$$\emptyset \subset A$$

eli että

$$\forall x[x \in \emptyset \to x \in A]\,. \tag{1}$$

Jos ehdon (1) formalisointi näyttää vieraalta, tarkoitetaan ehdolla vain, että ”kaikille x ehdosta $x \in \emptyset$ seuraa, että $x \in A$. Olkoon nyt x mielivaltainen vakio. Väitteen (1) todistamiseksi riittää osoittaa, että

$$x \in \emptyset \to x \in A \tag{2}$$

eli että ehdon (2) kaava on tosi. Kyseessä on implikaatiokaava; olennaisesti samanlainen kuin totuusarvotarkasteluissa. Koska tyhjässä joukossa ei ole yhtäkään alkiota, on alikaava $x \in \emptyset$ epätosi. Mutta tällöinhän (ks. implikaation totuustaulu) kaava (2) on kokonaisuudessaan tosi, joten väite on todistettu.

1.5a) Tehtävänä on päätellä totuusarvotaulukon avulla, että ”suora käänteinen päättely”

$$[P \wedge [\neg Q \Rightarrow \neg P]] \Rightarrow Q$$

on tautologia eli tosi kaavojen P ja Q totuusarvoista riippumatta.

Alla on totuusarvotaulukko asiasta; viimeiseltä riviltä näkyy taulukon täyttöjärjestys vaihenumeroilla ilmaistuna.

$[P$	$\wedge$	$[\neg$	Q	$\Rightarrow$	$\neg$	$P]]$	$\Rightarrow$	Q
0	0	1	0	1	1	0	**1**	0
1	1	0	1	1	0	1	**1**	1
1	0	1	0	0	0	1	**1**	0
0	0	0	1	1	1	0	**1**	1
1	4	2	1	3	2	1	5	1

Kuten yltä näkyy, tautologia tuli: päänuolen alla on pelkkiä ykkösiä.

1.5b) Tehtävänä on selvittää totuusarvotaulukon avulla, ovatko kaavat

$$\neg[[P \wedge Q] \Rightarrow R] \quad \text{ja} \quad [\neg P \vee \neg Q] \vee R$$

ekvivalentit eli, onko niillä sama totuusarvo kaikilla P:n, Q:n ja R:n totuusarvoilla. Tässä voi tietysti tehdä kaavoista kokonaiset totuusarvotaulukot, mutta laiska tekijä huomaa, että rivit

$\neg$	$[[P$	$\wedge$	$Q]$	$\Rightarrow$	$R]$
0	1	1	1	1	1
4	1	2	1	3	1

ja

$[\neg$	P	$\vee$	$\neg$	Q	$]\vee$	R
0	1	0	0	1	**1**	1
2	1	0	2	1	3	1

riittävät osoittamaan, etteivät kaavat ole ekvivalentit.

1.6. Tehtävänä oli arvioida erilaisten reaalilukuja koskevien väittämien todenperäisyyttä.

1. Jos $2x > 3$, niin $x > 2$

   Tämä ei ole totta. Ehto $2x > 3$ on yhtäpitävä ehdon $x > \frac{3}{2}$ kanssa; vastaesimerkiksi väittämälle käy siis mikä tahansa välin $]\frac{3}{2}, 2]$ reaaliluku, esimerkiksi $\frac{3}{4}$.

2. Jos $4x < 20$, niin $x < 100$ tai $x^2 + 3x - 2 = 0$.

   Tämä on totta. Jos nimittäin $4x < 20$, niin $x < 5$. Tällöin selvästi $x < 100$. Koska väitteen jälkimmäinen osa on tai-väittämä, ei ehtoa $x^2 + 3x - 2 = 0$ enää tarvitse tarkistaa: tieto siitä, että ehto $x < 100$ pätee, pakottaa tai-lauseen todeksi joka tapauksessa.

3. $x < 4$ jos ja vain jos $x < 16$ ja $2x < 16$

   Tämä ehto on yhtäpitävä ehdon

   $x < 4$ jos ja vain jos $x < 16$ ja $x < 8$

   kanssa. Ekvivalenssi ei ole tosi; vastaesimerkiksi käy vaikkapa valinta $x = 5$. Tällöin ehto "$x < 16$ ja $x < 8$" toteutuu, mutta ehto $x < 4$ ei.

1.7. Väitelause

$$\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z} : x - y < 1$$

tarkoittaa sanallisesti seuraavaa:

"Kaikille kokonaisluvuille x on olemassa kokonaisluku y siten, että epäyhtälö $x - y < 1$ on tosi."

Väittämän negaatio on

$$\exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z} : x - y \geq 1$$

eli sanallisesti

"On olemassa kokonaisluku x siten, että kaikille kokonaisluvuille y pätee $x - y \geq 1$."

Väite on tosi, sen negaatio ei. Väitteen todistamiseksi olkoon $x \in \mathbb{Z}$ mielivaltainen. Riittää löytää kokonaisluku y siten, että $x - y < 1$. Selvästi voidaan valita $x = y$.

1.8. Merkitään oikeita vastauksia 1:lla ja vääriä 0:llä. Tällöin tentti on jonkinlainen jono

$$t = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5), \quad t_i \in \{0, 1\} \text{ kaikille } i = 1, \ldots, 5\,. \tag{1}$$

Koska Ville tietää, ettei vastaus kolmeen perättäiseen kysymykseen ole sama, voidaan sanoa, että

$$\text{Kumpikaan yhdistelmä 000 ja 111 ei esiinny } t\text{:ssä.}\,. \tag{2}$$

Lisäksi Ville tehtävät luettuaan huomaa, että ensimmäisellä ja viimeisellä on vastakkaiset vastaukset, joten

$$t = (0, t_2, t_3, t_4, 1) \text{ tai } t = (1, t_2, t_3, t_4, 0)\,. \tag{3}$$

Tiedetään vielä, että enemmän on oikeita kuin vääriä vastauksia, joten

$$\#\{i \mid t_i = 1\} > \#\{i \mid t_i = 0\}\,. \tag{4}$$

Tuossa # tarkoittaa joukon alkioiden lukumäärää; merkintä on yleinen ja se kannattaa muistaa.

Ville osaa vastata tehtävään 2, ja hän voi tämän vastauksen perusteella päätellä muut vastaukset. Jos $t_2 = 1$, niin ehdon (3) perusteella

$$t = (0, 1, t_3, t_4, 1) \text{ tai } t = (1, 1, t_3, t_4, 0)\,.$$

Mutta tällöin sekä $t = (0, 1, 0, 1, 1)$ että $t = (1, 1, 0, 1, 0)$ kelpaavat muiden sääntöjen mukaisiksi eli mahdollisiksi ratkaisuiksi, joten Ville ei voi sanoa varmuudella oikeaa riviä. Siispä ei voi päteä $t_2 = 1$, ja on oltava $t_2 = 0$. Tällöin ehdon (3) perusteella

$$t = (0, 0, t_3, t_4, 1) \text{ tai } t = (1, 0, t_3, t_4, 0)\,. \tag{5}$$

Tilanne on siis se, että nyt varmuudella tiedetään, että ehdon (5) jompikumpi vaihtoehdoista pätee. Selvitetään, kumpi. Tässä vaiheessa voi tietysti epäillä, onnistuuko päättely – mistä sitä tietää, vaikka Ville olisi väärässä eikä ratkaisua oikeasti voisi t_2-tietouden avulla päätellä. Osoittautuu kuitenkin, että Villen logiikka ei petä:

Oletetaan ensin, että $t = (0, 0, t_3, t_4, 1)$. Tällöin ehdon (2) nojalla on oltava $t_3 = 1$ – muutenhan alkuun tulisi nollakolmikko. Nyt siis tiedetään, että $t = (0, 0, 1, t_4, 1)$. Jottei ehdon (2) vastaista ykkösriviä tulisi jonon loppuun, on vielä oltava $t_4 = 0$. Mutta tällöin $t = (0, 0, 1, 0, 1)$, mikä on vastoin ehtoa (4). Syntynyt ristiriita osoittaa, että vaihtoehto "t on muotoa $(0, 0, t_3, t_4, 1)$" on mahdoton. Tällöin ehdon (5) nojalla $t = (1, 0, t_3, t_4, 0)$. Tästä nähdään heti, että on oltava $t_3 = t_4 = 1$, sillä muuten (ehdon (4) vastaisesti) nollia tulisi enemmän kuin ykkösiä. Siispä $t = (1, 0, 1, 1, 0)$.

Vastauksen tehtävän kysymykseen: kakkos- ja vitostehtävien vastaus on sama: 'väärä väittämä'.

1.9. Väitetään, että kaikille joukoille A, B ja C on voimassa

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,.$$

Todistus: Oletetaan ensin, että $A, B, C \neq \emptyset$ eli että kaikki näistä joukoista ovat epätyhjiä.

Joukot osoitetaan samoiksi osoittamalla, että ne ovat toistensa osajoukkoja. On siis todistettava, että

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ ja} \tag{1}$$
$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)\,. \tag{2}$$

Ehdon (1) todistamiseksi oletetaan, että

$$x \in A \cup (B \cap C)\,. \tag{3}$$

On osoitettava, että

$$(A \cup B) \cap (A \cup C)\,. \tag{4}$$

Oletuksen (3) ja joukkojen yhdisteen määritelmän mukaisesti

$$x \in A \quad \text{tai} \tag{5}$$
$$x \in B \cap C\,. \tag{6}$$

Jos $x \in A$ eli jos ehto (5) pätee, niin selvästi $x \in A \cup B$ ja $x \in A \cup C$, joten ehto (4) on voimassa. Jos taas ollaan ehdon (6) tapauksessa, niin joukkojen leikkauksen määritelmän mukaisesti $x \in B$ ja $x \in C$. Mutta tällöin myös $x \in A \cup B$ ja $x \in A \cup C$, mistä ehto (4) seuraa. Tämä todistaa, kuten edellä todettiin, ehdon (1).

Todistettavana on vielä ehto (2). Tätä varten oletetaan, että

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)\,. \tag{7}$$

On osoitettava, ettö

$$x \in A \cup (B \cap C)\,. \tag{8}$$

Oletuksen (7) nojalla x kuuluu molempiin joukkoihn $A \cup B$ ja $A \cup C$. Tällöin erityisesti $x \in A$, ja koska $A \subset A \cup (B \cap C)$, saadaan ehto (8) voimaan. Tämä todistaa ehdon (2), ja väite on todistettu siinä tapauksessa, että $A, B, C \neq \emptyset$.

On vielä tarkasteltava tapaukset, joissa ainakin yksi joukoista A, B ja C on tyhjä.

Jos A on tyhjä joukko, niin väite tulee muotoon

$$B \cap C = B \cap C\,, \tag{9}$$

sillä kaikille joukoille D pätee $D \cup \emptyset = D$. Väite (9) on triviaalisti totta.

Jos $B = \emptyset$, niin väite tulee muotoon

$$A = A \cap (A \cup C)\,, \tag{10}$$

koska tyhjä joukko leikattuna millä tahansa joukolla on ilman muuta tyhjä. Ehto (10) nähdään oikeaksi seuraavasti: Jos $x \in A$, niin selvästi $x \in A$ ja $x \in (A \cup C)$, joten $x \in A \cap (A \cup C)$. Siispä

$$A \subset A \cap (A \cup C)\,. \tag{11}$$

Jos taas $x \in A \cap (A \cup C)$, niin selvästi $x \in A$, joten

$$A \cap (A \cup C) \subset A\,. \tag{12}$$

Väite (10) seuraa ehdoista (11) ja (12).

Jos $C = \emptyset$, niin väite tulee muotoon

$$A = A \cap (A \cup B)\,.$$

Tämä on olennaisesti sama kuin väite (10) ja todistuu samalla tavalla; tehtävän väitteessähän B:llä ja C:llä on sama rooli.

Nämä tarkastelut osoittavat, että väite pätee siinäkin tapauksessa, että yksi (tai useampi) väitteen joukoista on tyhjä. Väite on siis kokonaisuudessaan todistettu. $\square$

1.10. Jos vasen yläkulma poistetaan, jää jäljelle 32 valkoista ja 31 mustaa ruutua. Mutta dominoissa on kussakin yksi valkoinen ja yksi musta ruutu, joten rakentelu näistä ei onnistu: dominorakannelmissahan valkoisten ja mustien ruutujen lukumäärä säilyy samana. Vastaavasti, jos poistetaan vasemman yläkulman mustan ruudun lisäksi oikean alakulman musta ruutu, on tuloksena ”shakkilauta”, jossa on 32 valkoista ja 30 mustaa ruutua eli ei onnistu.