Approbatur 3, demo 3, ratkaisut

1. Selvitetään ensin $\mathrm{syt}(2014, 1748) =: d$, minkä jälkeen $\mathrm{pyj}(2014, 1748) =: e$ saadaan relaatiosta $de = 2014 \cdot 1748$. Eukleideen algoritmilla

$$\begin{aligned} 2014 &= 1 \cdot 1748 + 266 \\ 1748 &= 6 \cdot 266 + 152 \\ 266 &= 1 \cdot 152 + 114 \\ 152 &= 1 \cdot 114 + \underline{38} \\ 114 &= 3 \cdot 38, \end{aligned}$$

joten $d = 38$. Siis $e = (2014 \cdot 1748)/38 = 92644$.

2. Resepti: Järjestä luvut $1 - 99$ esimerkiksi kuuden luvun allekkaisiin riveihin (jaon ei tarvitse mennä tasan) ja viivaa yli luku 1. Etsi pienin lukua 1 suurempi luku, jota ei ole viivattu yli (eli luku 2) ja viivaa yli sen aidot monikerrat. Etsi pienin lukua 2 suurempi luku, jota ei ole viivattu yli (eli luku 3) ja viivaa yli sen aidot monikerrat. Jatketaan näin, kunnes seuraavaa ”etsittävää” lukua ei löydy lukujen $1 - 99$ joukosta. Tällöin yli viivaamatta jääneet luvut ovat etsityt alkuluvut, jotka siis ovat

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 \text{ ja } 97.$$

(Koska $99 < 10^2$, voitaisiin prosessi Opiskelutehtävän 21 nojalla lopettaa jo ”etsityn” luvun ollessa vähintään 10.)

3. Huomataan, että

$$28665 = 5 \cdot 5733 = 5 \cdot 3 \cdot 1911 = 5 \cdot 3^2 \cdot 637 = 5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 91 = 5 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13$$

ja toisaalta

$$22869 = 3 \cdot 7623 = 3^2 \cdot 2541 = 3^3 \cdot 847 = 3^3 \cdot 7 \cdot 121 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11^2,$$

missä kunkin luvun viimeisin muoto on tehtävän 2 nojalla alkulukupotenssien tulo. Alkutekijäesityksistä saadaan luettua

$$\mathrm{syt}(28665, 22869) = 3^2 \cdot 7 = 63 \quad \text{ja} \quad \mathrm{pyj}(28655, 22869) = 5 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13 = 10405395,$$

missä syt saatiin poimimalla esitysten ”yhteinen osuus” ja pyj valitsemalla tuloon alkutekijöiden suurin potenssi esitysten väliltä.

4. Koska $803 < 29^2$, $1019 < 32^2$ ja $1123 < 34^2$, riittää Opiskelutehtävän 21 nojalla tutkia kunkin luvun jaollisuutta em. ylärajassa esiintyvää kantalukua pienemmillä alkuluvuilla. Alkutekijäehdokkaat löytyvät tehtävän 2 ratkaisusta. Huomataan, että $803 = 11 \cdot 73$. Siten 803 ei ole alkuluku. Kokeilemalla nähdään myös, ettei luku 1019 ole jaollinen millään alkutekijäehdokkaistaan (eli luvulla $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ tai 31). Näin ollen 1019 on alkuluku. Vastaavasti 1123 on alkuluku.

5. Huomataan aluksi, että $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$. Olkoon n pariton eli $n = 2k + 1$ jollekin $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin

$$(n + 1)(n - 1) = ((2k + 1) + 1)((2k + 1) - 1) = (2k + 2)(2k) = 4(k + 1)k.$$

Koska peräkkäisinä kokonaislukuina joko $k+1$ tai k on parillinen, on sitä myös niiden tulo. Siten $(k+1)k = 2l$ jollekin $l \in \mathbb{Z}$. Nyt

$$n^2 - 1 = (n+1)(n-1) = 4(k+1)k = 4 \cdot 2l = 8l, \quad l \in \mathbb{Z},$$

eli $n^2 - 1$ on jaollinen luvulla 8.

6. Olkoon $p > 3$ alkuluku. Jakoyhtälön nojalla on $k, r \in \mathbb{Z}$ siten, että $p = 6k + r$ ja $r \in \{0, \ldots, 5\}$. Jos pätisi $r \in \{0, 2, 4\}$, niin parillisten lukujen summana $p = 6k + r$ olisi parillinen. Kuitenkin $p > 3$ ja 2 on ainoa parillinen alkuluku, joten tällöin p ei olisikaan alkuluku. Jos taas $r = 3$, niin olisi $p = 6k + 3 = 3(2k+1)$, $(2k+1) \in \mathbb{Z}$, eli $3 \mid p$. Kuitenkin $p > 3$, joten taaskaan p ei olisi alkuluku. Siis $r = 1$ tai $r = 5$. Jälkimmäisessä tapauksessa

$$p = 6k + 5 = 6k + 5 + 1 - 1 = 6k + 6 - 1 = 6(k+1) - 1, \quad (k+1) \in \mathbb{Z}.$$

Siis $p = 6n + 1$ tai $p = 6n - 1$ jollekin $n \in \mathbb{Z}$. Rajoite $n \in \mathbb{N}$ seuraa siitä, että lopuissa tapauksista $6m \pm 1 \leq 1$ eikä tämä voi olla luvun $p > 3$ esitys.

7. (a) Sijoittamalla $n = 1, \ldots, 9$ lausekkeeseen $n^2 + n + 41$ nähdään, että ensimmäiset seitsemän arvoa löytyvät tehtävän 2 alkulukulistasta. Loput kaksi ovat 113 ja 131, jotka nähdään alkuluvuiksi varmistamalla jaottomuus alkuluvuilla $2, 3, 5, 7$ ja 11, sillä seuraava alkuluku olisi 13, jolle jo $13^2 > 131$.

(b) Ei: esimerkiksi arvolla $n = 41$ saadaan $n^2 + n + 41 = 41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$, joka ei ole alkuluku, sillä $41, 43 > 1$.

8. Voidaan olettaa $p > q$. Koska $|(6k \pm 1) - (6l \pm 1)| \leq 6|k - l| - 2 \leq 6 - 2 = 4$ eri kokonaisluvuille k ja l, on tehtävän 6 nojalla $n \in \mathbb{N}$ siten, että $p = 6n + 1$ ja $q = 6n - 1$. Siten

$$p + q = (6n + 1) + (6n - 1) = 12n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

eli $p + q$ on jaollinen luvulla 12.

9. Koska $\mathrm{syt}(c, a) = 1$, on luentojen nojalla $k, l \in \mathbb{Z}$ siten, että $1 = kc + la$. Ehdon $c \mid ab$ myötä on $m \in \mathbb{N}$, jolle $ab = mc$. Nyt

$$b = b \cdot 1 = b(kc + la) = bkc + lab = bkc + lmc = (bk + lm)c, \quad (bk + lm) \in \mathbb{Z},$$

joten $c \mid b$.

10. (a) Jos $n \in \mathbb{N}$, niin $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$ on kolmen peräkkäisen kokonaisluvun tulo ja sisältää siten kolmella jaollisen luvun sekä kahdella jaollisen luvun. Näin ollen, koska 2 ja 3 ovat alkulukuja, esiintyvät ne tekijöinä luvun $n^3 - n$ alkutekijäesityksessä. Siten myös niiden tulo $2 \cdot 3 = 6$ on luvun $n^3 - n$ tekijä. Siis $n^3 - n$ on jaollinen luvulla 6.

(b) Jos n on parillinen, niin myös n^2 on parillinen. Silloin $n^2 - 3$ on pariton eikä näin ollen voi olla jaollinen luvulla 4. Jos taas n on pariton eli muotoa $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, niin

$$n^2 - 3 = (2k+1)^2 - 3 = 4k^2 + 4k + 1 - 3 = 4(k^2 + k) + 2, \quad (k^2 + k) \in \mathbb{Z}.$$

Silloinkaan $n^2 - 3$ ei ole jaollinen luvulla 4.