1. Kirjoita permutaatio

$$\sigma = (\ 1\ 3\ 6\ 2\ )(\ 4\ 5\ 6\ 1\ )(\ 2\ 3\ 4\ 5\ )$$

perinteisessä kaksirivisessä esitysmuodossa.

Ratkaisu. Katsotaan alkioden $1, 2, 3, 4, 5, 6$ kuvautuminen yksi kerrallaan, jolloin

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

2. Kirjoita edellisen tehtävän permutaatio σ kiertona tai erillisten kiertojen tulona.

Ratkaisu. Kummasta tahansa aiemmasta muodosta voi päätellä seuraavaa: Permutaatiolla σ kuvattaessa perä jälkeen

$$1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 6 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 1.$$

Tämä sisältää kaikki luvut joten tämä on kysytty

$$\sigma = (\ 1\ 4\ 2\ 6\ 3\ 5).$$

Sigma on siis itsessään kierto. □

3. Kirjoita tehtävän 1 permutaatio σ vaihtojen (2-kiertojen) tulona

Ratkaisu. Kuten luennollakin tehtiin, voimme jokaisen kierron kirjoittaa vaihtojen tulona siten, että laitetaan ensin toinen kierron ensimmäinen alkio 1 oikealle paikalle tehdään siis vaihto (14). Sitten kierron toinen alkio 4 on päätynyt ensimmäisen paikalle joten se pitää vaihtaa kolmannen alkion 2 kanssa tehdään siis vaihto (12), nyt kolmas alkio 2 on päätynyt ensimmäisen paikalle mutta se pitää kuvata neljänneksi jne jne.. joten kaiken kaikkiaan saamme $\sigma = (\ 1\ 5\ )(\ 1\ 3\ )(\ 1\ 6\ )(\ 1\ 2\ )(\ 1\ 4\ )$. □

4. Määritä permutaation

$$\rho = (\ 1\ 4\ 3\ 2\ )(\ 4\ 2\ 6\ 1\ )(\ 2\ 3\ 4\ 5\ )$$

käänteispermutaatio ja kirjoita käänteipermutaatio erillisten kiertojen tulona.

Ratkaisu. Tämän voi myös tehdä monella eri tapaa mutta kirjoitetaan tässä ensin kaksirivinen esitymuoto ja käännetään se. Näin ollen

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

ja siten

$$\rho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tällä saamme seuraavat kierrot kun kuvataan peräkkäin

$$\begin{aligned} &1 \mapsto 3 \mapsto 1 \\ &2 \mapsto 2 \\ &4 \mapsto 6 \mapsto 5 \mapsto 4 \end{aligned}$$

joten $\rho^{-1} = (\ 1\ 3\ )(\ 4\ 6\ 5\ )$. Huomaa, että kierron käänteipermutaation saa kirjoittamalla kierron alkiot käännetyssä järjestyksessä, joten sitäkin kautta voisi edetä suoraan. $\square$

5. Määritä tehtävissä $1 - 4$ esiintyvien ja esille tulleiden permutaatioiden parillisuus/parittomuus. Onko näissä ensimmäisessä neljässä tehtävässä selvää mihin permutaatioryhmään σ ja ρ kuuluvat? Onko sillä edes merkitystä?

Todistus. Esille tulleille permutaatiolle pätee $\epsilon(\sigma) = (-1)^5 = -1$, $\epsilon(\rho) = \epsilon(\rho^{-1}) = (-1)(-1)^2 = -1$. Huomaa, että

$$\epsilon(\rho)\epsilon(\rho^{-1}) = \epsilon(\rho\rho^{-1}) = \epsilon(\mathrm{id}) = 1.$$

Toisinsanoen kaikki permutaatiot ovat parittomia $\square$

6. Luettele ne neljän alkion permutaatiot, jotka ovat parillisia.

Ratkaisu. Neljän alkion joukon permutaatiot jos kirjoittaa erillisten kiertojen tulona niin esityksessä voi esiintyä 2-alkion kiertoja (vaihtoja) yksi tai kaksi kappaletta. Yksittäiset vaihdot ovat parittomia joten näistä saadaan parilliset permutaatiot:

$$(\ 1\ 2\ )(\ 3\ 4\ ),\ (\ 1\ 3\ )(\ 2\ 4\ ) \text{ ja } (\ 1\ 4\ )(\ 2\ 3\ ).$$

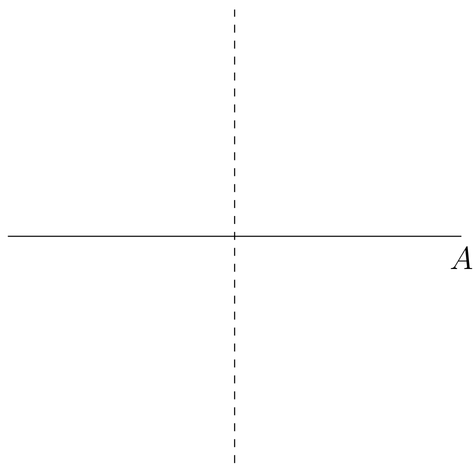
Kolmen alkion pituiset kierrot ovat kaikki parillisia ja näitä ovat

$$(\ 1\ 2\ 3\ ),\ (\ 1\ 3\ 2\ ),\ (\ 1\ 2\ 4\ ),\ (\ 1\ 4\ 2\ ),\ (\ 1\ 3\ 4\ ),\ (\ 1\ 4\ 3\ ),\ (\ 2\ 3\ 4\ ) \text{ ja } (\ 2\ 4\ 3\ ).$$

Näiden lisäksi parillisia permutaatiota on enään identtinen sillä neljän alkion kierrot ovat taas parittomia. Yhteensä parillisia on siis 12 kpl. $\square$

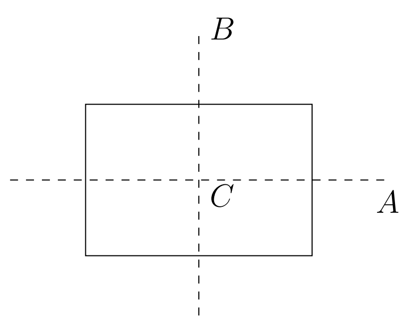
7. Määritä janan symmetriaryhmä.

Ratkaisu. Janalla on symmetrioina pelkästään identtinen kuvaus ja peilaus janan keskipisteen kautta janaa vasten kohtisuorassa olevaa suoraa pitkin. Tämä peilaus on sama kuin kierto janan keskipisteen suhteen 180 astetta. Näin ollen janan symmetriaryhmä on syklinenryhmä C_1. □



8. Määritä suorakulmion, jonka kanta ja korkeus ovat eri suuret, symmetriaryhmä. Muodosta saamasi ryhmän kertotaulu.

Ratkaisu. Suorakulmiolle on kolme symmetriaa identtisenkuvauksen lisäksi. Ne ovat peilaus suoran A suhteen, peilaus suoran B suhteen ja kierto 180 astetta pisteen C suhteen. Merkitään σ:lla peilausta suoran A suhteen ja ρ:lla kiertoa 180 asteen verran pisteen C



suhteen. Tällöin peilaus suoran B suhteen on sama kuin $\rho\sigma$. Näin ollen symmetriaryhmä on

$$\{id, \rho, \sigma, \rho\sigma\} = D_2.$$

Huomaa, että tässä $\sigma\rho = \rho\sigma$ eli näiden tulojärjestyksen saa vaihtaa. Tämän avulla kertotauluksi tulee □

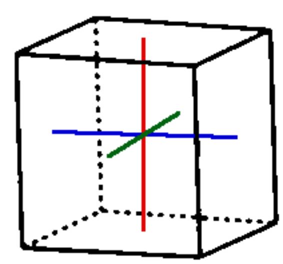
$\cdot$	i	ρ	σ	$\rho\sigma$
i	i	ρ	σ	$\rho\sigma$
ρ	ρ	i	$\rho\sigma$	σ
σ	σ	$\rho\sigma$	i	ρ
$\rho\sigma$	$\rho\sigma$	σ	ρ	i

9. Millaisia symmetrioita on kirjaimilla A-Z? Piirrä kirjaimet mahdollisimman symmetrisiksi.

Ratkaisu. Kirjaimilla A,B,C,D,E,I,K,L,M,Q,T,U ja V on yksi peilisymmetria. Kirjaimilla F,G,J,P ja R ei ole mitään symmetrioita. Kirjaimilla N,S ja Z yksi kiertosymmetria. Kirjaimella Y kolme peilausta ja kaksi kiertoa, kirjaimella X neljä peilausta ja kolme kiertoa. Kirjaimella O äärettömän monta peilausta ja kiertoa. □

10. Määritä kuution symmetriaryhmä. Taittele alta itsellesi kuutio mitä pyöritellä.

Ratkaisu. Kuutiolla on 48 symmetriaa. Näistä yhdeksän saa kiertämällä kuutiota 90 asteen verran minkä tahansa kahden vastakkaisen tahkon keskipisteiden kautta kulkevan suoran suhteen (3 erilaista).



Lisäksi voimme kiertää kuutiota 180 astetta suorien, jotka kulkevat vastakkaisten särmien keskipisteiden kautta kulkevien suorien suhteen, yhteensä 6 kpl. □

Edelleen voimme kiertää kuutiota 120 ja 240 astetta avaruuslävistäjien suhteen, näitä yhteensä 8 kpl. Jos lisästään edellä mainittuihin identtinen kuvaus niin kasassa on yhteensä $1 + 9 + 6 + 8 = 24$ kiertoa. Tässä onkin kaikki kuution kiertosymmetriat. Muut kuution symmetriat saadaan samaan tapaan kuin tetraedrinkin tapauksessa (luennot) eli etsimällä yksi kuution peilaus olkoon se σ ja operoimalla ensin tällä peilauksella ja sen jälkeen millä tahansa edellä mainitulla 24:llä kierrolla saamme 24 uutta symmetriaa. Nämä todellakin ovat eri symmetrioita, sillä jos olisi kaksi eri kiertoa ρ_1 ja ρ_2, joille $\rho_1\sigma = \rho_2\sigma$ niin kertomalla oikealta σ:lla $(= \sigma^{-1})$ saamme ristiriidan $\rho_1 = \rho_2$. Lisäksi σ ei ole kierto joten näin todellakin saadaan 24 uutta symmetriaa kuutiolla. Symmetrioita on yhteensä siis 48 kpl.