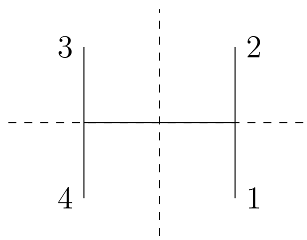
1. Kuvaa kirjaimen H symmetriaryhmä permutaatioiden avulla ja tee saadulle ryhmälle kertotaulu. (Nimeä tätä varten kirjaimesta symmetrian mielessä tärkeitä kohtia numeroilla)

Ratkaisu. Numeroidaan kirjaimen H neljä sakaraa kuten kuvassa. Tällöin kirjaimen H symmetriat ovat permutaatioryhmän S_4 alkioita. Toisin sanoen

$$\mathcal{D}(H) = \{\text{id}, (13)(24), (14)(23), (12)(34)\}.$$

Jos merkitään $\rho = (13)(24)$ ja $\sigma = (14)(23)$ niin



$$\rho\sigma = (13)(24)(14)(23) = (12)(34)$$

ja siten kyseisen symmetriaryhmä on toinen dihedraaliryhmä (D_2)

$$\mathcal{D}(H) = \{id, \rho, \sigma, \rho\sigma\} = D_2.$$

Kertotaulu tälle tehtiin jo viime demoissa ja se näyttää seuraavalta: (HUOM! $\sigma\rho = \rho\sigma$) □

$\cdot$	i	ρ	σ	$\rho\sigma$
i	i	ρ	σ	$\rho\sigma$
ρ	ρ	i	$\rho\sigma$	σ
σ	σ	$\rho\sigma$	i	ρ
$\rho\sigma$	$\rho\sigma$	σ	ρ	i

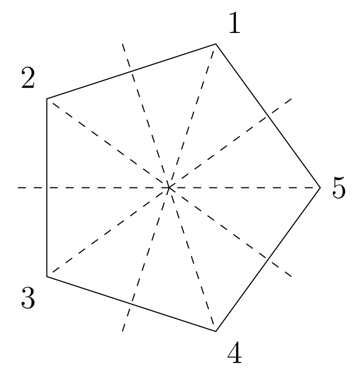
2. Ilmoita permutaatioiden avulla säännöllisen viisikulmion symmetriaryhmä. Kirjoita nämä permutaatiot dihedraaliryhmänä (ts. yhden kierron ja peilauksen tuloina).

Ratkaisu. Numeroidaan viisikulmion kärjet numeroilla ja kuvataan kaikki symmetriat viiden alkion permutaatioiden avulla eli ryhmän S_5 alkioina. Viisikulmion symmetrioita ovat siis kierrot

$$\text{id}, (12345), (13524), (14253), (15432)$$

ja peilaukset

$$(25)(34), (13)(45), (24)(15), (35)(12), (14)(23).$$

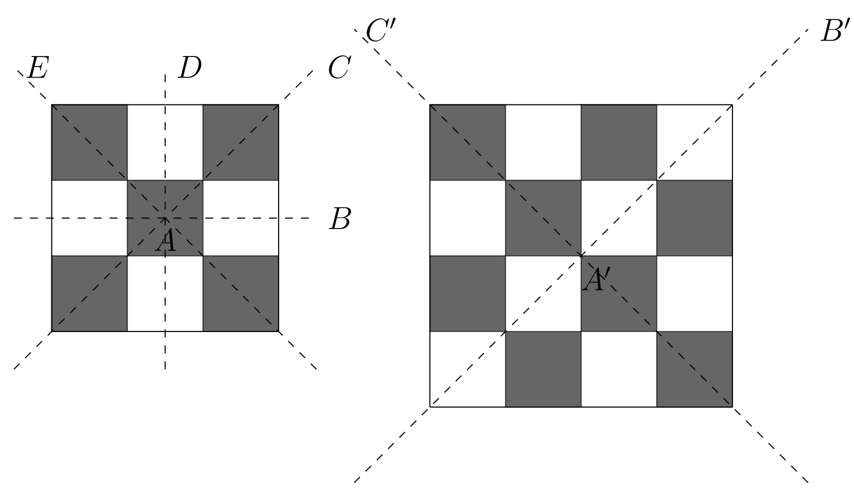


Olkoon $\rho = (12345)$ ja $\sigma = (25)(34)$. Näillä merkinnöillä

$$
\begin{aligned}
(13)(45) &= (13524)(25)(34) = \rho^2\sigma \\
(24)(15) &= (15432)(25)(34) = \rho^4\sigma \\
(35)(12) &= (12345)(25)(34) = \rho\sigma \\
(14)(23) &= (14253)(25)(34) = \rho^3\sigma
\end{aligned}
$$

ja siten viisikulmion symmetriaryhmä on dihedraaliryhmä D_5, niinkuin pitikin olla. □

3. Määritä 3×3 ja 4×4 shakkiruudukoiden symmetriaryhmät ja vertaa näitä. Nimeä nämä syklisinä-tai dihedraaliryhminä.



Ratkaisu. Annetuilla shakkiruudukoilla on seuraavat symmetriat

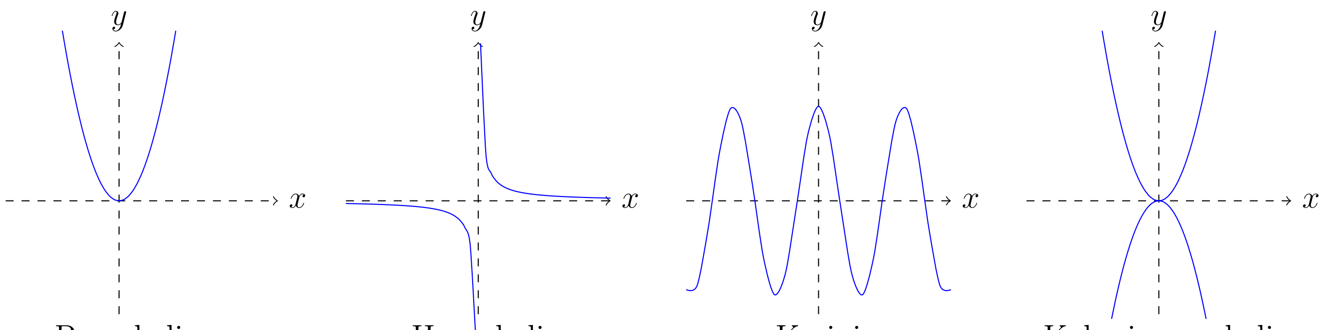
$$\mathcal{D}(3 \times 3) = \{\mathrm{id}, \rho_A^{90}, \rho_A^{180}, \rho_A^{270}, \sigma_B, \sigma_C, \sigma_D, \sigma_E\} = D_4$$

ja

$$\mathcal{D}(4 \times 4) = \{\mathrm{id}, \rho_{A'}^{180}, \sigma_{B'}, \sigma_{C'}\} = D_2.$$

□

4-5. Määritä seuraavien tasokäyrien symmetriaryhmät (kuviot jatkuvat samanlaisina koko tasoon)



Ratkaisu. Kuvan tasokäyrillä on seuraavat symmetriat identtisen kuvauksen lisäksi:

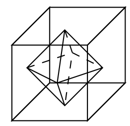
- Paraabeli; peilaus y-akselin suhteen (D_1)
- Hyperbeli; Kierto 180 astetta pisteen $(0, 0)$ suhteen, Peilaus suoran $y = x$ suhteen ja peilaus suoran $y = -x$ suhteen (D_2)
- Kosinifunktio; Peilaus suorien $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ suhteen ja siirto vektorilla $(2\pi n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (D_∞)
- Kaksoiparaabeli; Kierto 180 astetta pisteen $(0, 0)$ suhteen, Peilaukset x-ja y-akseleiden suhteen (D_2)

□

6. Yhdistä kuution tahkojen keskipisteet janoilla ja piirrä avaruuskappale, jonka särmät ovat täsmälleen nämä janat. Mikä avaruuskappale näin saadaan? Vertaile saadun kappaleen kierto-ja symmetriryhmiä kuution vastaaviin.

Todistus. Piirretään kuvio kuution sisälle kuten tehtävänannossa jolloi huomataan, että sinne muodostuu oktaedri eli saannöllinen monitahokas, jonka tahkot ovat tasasivuisia kolmioita ja niitä on 8 kappaletta. Tällä ja kuutiolla on samat kierto-ja symmetriaryhmät (luennot), oktaedri on ns. duaalikappale kuutiolle.

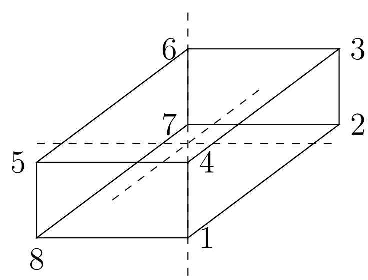
□



7. Määrää tiiliskiven (suorakulmio, jonka erisuuntaiset särmät ovat eripituisia) kiertoryhmä ja edelleen koko symmetriaryhmä.

Ratkaisu. Tiiliskivellä on kiertosymmetriaa sen vastakkaisten tahkojen keskipisteiden kautta kulkevien suorien suhteen 180 astetta (3 kpl). Kierrot avaruuslävistäjien tai vastakkaisten särmien keskipisteiden kautta kulkevien suorien suhteen eivät ole symmetrioita (vrt. kuutio). Näin ollen saimme kolme kiertoa, jotka voimme esittää permutaatioiden avulla siten, että

$$\rho_1 = (17)(28)(46)(35), \rho_2 = (13)(24)(57)(68) \text{ ja } \rho_3 = (15)(48)(26)(37).$$



Näille pätee seuraavat $\rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2 = \mathrm{id}$ ja

$$\begin{aligned}
\rho_1\rho_2 &= (17)(28)(46)(35)(13)(24)(57)(68) = (15)(48)(26)(37) = \rho_3 \\
\rho_1\rho_3 &= (17)(28)(46)(35)(15)(48)(26)(37) = (13)(24)(57)(68) = \rho_2 \\
\rho_2\rho_3 &= (13)(24)(57)(68)(15)(48)(26)(37) = (17)(28)(46)(35) = \rho_1.
\end{aligned}$$

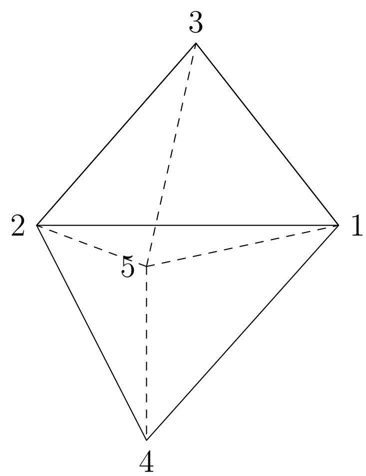
Valitsemalla $\rho = \rho_1$ ja $\sigma = \rho_2$ saamme tiiliskiven kiertoryhmän muotoon

$$\mathcal{R}(\text{Tiili}) = \{\mathrm{id}, \rho, \sigma, \rho\sigma\} = D_2.$$

Koko symmetriaryhmään kuuluu tämän lisäksi vielä 4 peilausta, 3 kpl eri peilauksia pokkileikkaustasojen suhteen ja yksi peilaus keskipisteen suhteen. Olkoot σ_2 eräs näistä, tällöin muut saadaan muodossa $\rho\sigma_2, \sigma\sigma_2$ ja $\rho\sigma\sigma_2$. $\square$

8. Liimaa kaksi tetraedriä yhdestä tahkosta yhteen. Määrää saadun avaruuskappaleen kiertoryhmä.

Ratkaisu. Otetaan kaksi tetraedriä ja liimataan ne yhdestä tahkosta kiinni toisiinsa. Jos tämän havainnollistaminen tuntuu liian hankalalta niin leikkaa seitsemän tasasivuista kolmiota kartongista ja kokoa itsellesi oma tuplatetraedri mitä pyöritellä. Nimetään tämän kappaleen kulmat kuten kuvassa numeroilla 1,2,3,4 ja 5. Kappaleella on kiertosymmetriaa pisteiden 3 ja 4 kautta kulkevan suoran suhteen 120 ja 240 asteen kierrot. Huomaan, että



tämä suora kulkee väliin jäävän tasasivuisen kolmion keskipisteen kautta. Lisäksi kappalella on kiertosymmetriaa suoran suhteen joka kulkee pisteen 1 ja särmän 25 keskipisteen kautta (180 asteen kierto). Samaan tapaan kiertosymmetriaa on myös pisteen 5 ja särmän 12 keskipisteen kautta kulkevan suoran suhteen 180 asteen kierron ja pisteen 2 ja särmän 15 keskipisteen kautta 180 asteen kierron verran. Yhteensä siis $1 + 2 + 3 = 6$ kpl. Huomaa, että tämä on samakuin tasasivuisen kolmion symmetriaryhmä eli

$$\mathcal{R}(\text{tuplatetraedri}) = D_3.$$

Tämän näkee myös nimeämällä $\rho = (125)$ ja $\sigma = (25)(34)$. Tällöin kierto 240 astetta akselin 34 ympäri on $(152) = \rho^2$. Kierto 180 astetta pisteen 1 ja särmän 25 keskipisteen kautta kulkevan suoran suhteen on σ, kierto 180 astetta pisteen 5 ja särmän 12 keskipisteen kautta kulkevan suoran suhteen on $(12)(34) = (125)(25)(34) = \rho\sigma$ ja kierto 180 astetta pisteen 2 ja särmän 15 keskipisteen kautta kulkevan suoran suhteen on $(15)(34) = (152)(25)(34) = \rho^2\sigma$. Näillä merkinnöillä siis

$$\mathcal{R}(\text{tuplatetraedri}) = \{\text{id}, \rho, \rho^2, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma\}.$$

□

9. Määrää dihedraaliryhmän D_3 kaikkien alkioiden kertaluvut.

Ratkaisu. Dihedraaliryhmän D_3 voi kirjoittaa muodossa

$$D_3 = \{\mathrm{id}, \rho, \rho^2, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma\}.$$

Kertaluvut voi laskea suoraan toistamalla samaa kuvausta (kertomalla alkiota itsellään) niin kauan, että saadaan identtinen kuvaus ulos. Tämä kertolaskujen lukumäärä, joka antaa identtisen kuvauksen, on alkion kertaluku. Muista, että $\rho^3 = \mathrm{id}$ ja $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Lisäksi tarvitsemme tietoa, että $\sigma\rho = \rho^2\sigma$.

Alkio	Yhtälö	Kertaluku
id	$\mathrm{id}^1 = \mathrm{id}$	1
ρ	$\rho^3 = \mathrm{id}$	3
ρ^2	$(\rho^2)^3 = (\rho^3)^2 = \mathrm{id}$	3
σ	$\sigma^2 = \mathrm{id}$	2
$\rho\sigma$	$(\rho\sigma)^2 = \rho^3\sigma^2 = \mathrm{id}$	2
$\rho^2\sigma$	$(\rho^2\sigma)^2 = (\rho\sigma)^2 = \mathrm{id}$	2

□

10. Viimeinen arvoitus: Aapo ja Kaapo vasta ystävystyivät Millan kanssa ja haluaisivat tietää Millan syntymäpäivän. Milla antaa heille 10 vaihtoehtoa:

Milla kertoo Aapolle syntymäkuukauden (mutta ei päivää) ja Kaapolle päivämäärän (mutta ei kuukautta).

Toukokuu	15	16	19
Kesäkuu	17	18	
Heinäkuu	14	16	
Elokuu	14	15	17

Tämän jälkeen Aapo sanoo: "En tiedä Millan syntymäpäivää, mutta tiedän ettei Kaapokaan tiedä". Tähän Kaapo jatkaa: "Aluksi en tiennyt mikä Millan syntymäpäivä oli, mutta nyt tiedän". Edelleen Aapo jatkaa: "Nyt myös minä tiedän mikä Millan syntymäpäivä on". Mikä Millan syntymäpäivä on?[1]

Ratkaisu. Aapon kommentin "En tiedä Millan syntymäpäivää, mutta tiedän ettei Kaapokaan tiedä" perusteella voidaan automaattisesti hylätä ne kuukaudet joissa on vain yksi yksittäinen päivämäärä eli tässä tapauksessa päivämääriä 18 ja 19 vastaavat kuukaudet, toukokuu ja kesäkuu. Kaapon jatkokommentin "Aluksi en tiennyt mikä Millan syntymäpäivä oli, mutta nyt tiedän" hänelle ei ole voitu kertoa päivää numero 14 sillä muuten hän ei voisi tietää Millan syntymäpäivää. Ja jos nyt edelleen Aapo jatkaa "Nyt myös minä tiedän mikä Millan syntymäpäivä on" joten hänelle kerrottu kuukausi ei voi olla elokuu sillä hänellä olisi edelleen 2 vaihtoehtoa niinpä kuukauden täytyy olla heinäkuu ja päivämäärän 16. Onko tämä ainut tapa tulkita tehtävä? □

[1] Tämä arvoitus sai hijattain suurta huomiota sosiaalisessa mediassa, jossa väitettiin kyseisen tehtävän olleen alunperin alakoululaisille tarkoitettu.