APPROBATUR 3 (MATP170)
Kirjallinen 1, Ratkaisu

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

1. Osoitetaan, matemaattista indukstiota käyttäen, että kaikille $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3} \text{ on kokonaisluku.}$$

Sijoittamalla arvo $n = 1$ saadaan ulos luku 1 joka on kokonaisluku, eli induktion perusaskel on ok. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee arvolla n ja näytetään tämän avulla, että väite pätee arvolla $n + 1$. Tällöin kokonaisluvuksi näytettävä luku näyttää tältä

$$\frac{(n+1)^3}{6} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{3}.$$

Avataan sulut ja ryhmitellään termejä sopivasti, jolloin

$$\frac{n^3+3n^2+3n+1}{6} + \frac{n^2+2n+1}{2} + \frac{n+1}{3} = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3} + \frac{3n^2+9n+6}{6}$$
$$= \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ensimmäinen summattava on kokonaisluku induktio-oletuksen nojalla. Jälkimmäisen osoittajassa on kahden peräkkäisen kokonaisluvun tulo ja koska näistä toinen on jaollinen luvulla 2 niin myös niiden tulo on. Saatu luku on siis kokonaisluku ja induktiotodistus päättyy. Pisteytyksessä sai pisteitä eri vaiheista siten, että jos perusaskel ok niin 1p. Jos induktio-oletus näkyvillä niin 1p. Todistuksesta 0-2p riipuen sen vaiheiden oikeellisuudesta.

2. Induktio todistus on tässä huuhaata sen vuoksi, että perusaskel on jäänyt tarkistamatta ja siksi induktio-oletus on epätosi. Kuten logiikan säännöistä muistamme, että epätodesta voi seurata mitä vaan joten siksi tuossa saatiin virheellinen tulos “näytettyä”. Kuten voi huomata niin väite ei ole totta millään n vaan tuosta tulee aina pariton. Pisteitä jaettu 0-2p perustelujen oikeellisuudesta riippuen.