APPROBATUR 3 (MATP170)
Kirjallinen 2, Ratkaisu

(a) Heksadesimaalijärjestelmässä A ja B vastaavat lukuja 10 ja 11, joten, koska $16 = 2^4$, saadaan

$$\begin{aligned}
12AB &= 1 \cdot 16^3 + 2 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 \\
&= (2^4)^3 + 2 \cdot (2^4)^2 + 10 \cdot (2^4)^1 + 11 \cdot (2^4)^0 \\
&= 2^{12} + 2 \cdot 2^8 + 10 \cdot 2^4 + 11 \cdot 2^0 \\
&= 2^{12} + 2^9 + (2^3 + 2^1) \cdot 2^4 + (2^3 + 2^1 + 2^0) \cdot 2^0 \\
&= 2^{12} + 2^9 + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 \\
&= 1001010101011_2 \,.
\end{aligned}$$

Vaihtoehtoisesti luvun $12AB$ voisi ensin muuntaa kymmenjärjestelmään, jolloin binääriesitys löydetään esimerkiksi ”toistuvasti luvulla 2 jakamalla” ja sitten jakojäännöksistä takaperin (!) lukemalla. Pisteitä sai 0–2p, ja esimerkiksi vaihtoehtoisessa tavassa lievästi väärinkin lasketun desimaaliluvun oikea muuntaminen tuotti yhteistuloksen 1,5p.

(b) Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tällöin sillä on desimaaliesitys

$$n = a_r \cdot 10^r + a_{r-1} \cdot 10^{r-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \,,$$

josta tässä tehtävässä tarvitsee oikeastaan tietää vain, että $r \in \mathbb{N}$ ja $a_0, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$. Huomataan, että $10 \equiv 1 \pmod 9$ ja siten $10^k \equiv 1^k = 1 \pmod 9$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
n &= a_r \cdot 10^r + a_{r-1} \cdot 10^{r-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\
&\equiv a_r \cdot 1 + a_{r-1} \cdot 1 + \cdots + a_1 \cdot 1 + a_0 \pmod 9 \\
&= a_r + a_{r-1} + \cdots + a_1 + a_0 \,.
\end{aligned}$$

Erityisesti

$$n \equiv 0 \pmod 9 \quad \Leftrightarrow \quad a_r + a_{r-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod 9$$

eli

$$9 \mid n \quad \Leftrightarrow \quad 9 \mid a_r + a_{r-1} + \cdots + a_1 + a_0 \,,$$

mikä olikin osoitettavana. Modulolaskennan sijaan voisi myös perustella jollakin tavalla, että 9 jakaa luvun $10^k - 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja sen jälkeen ”irrottaa” kyseisten kerrointen osuus luvun n desimaaliesityksessä. Tuo osuus on yhdeksällä jaollinen, joten summan loppuosa, joka on juuri desimaaliesityksen numeroiden summa, määrää luvun n yhdeksällä jaollisuuden. Pisteytyksessä (max 4p) ilman varsinaista todistusta oli mahdollista saada 1p. Todistuksista sai pisteitä niiden oikeellisuuden mukaan, lähes poikkeuksetta vähintään 3p.