APPROBATUR 3 (MATP170)
Kirjallinen 3
Ratkaisu

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

---

1. Permutaation $\sigma \in S_n$ kertaluku on pienin positiivinen kokonaisluku k, jolle

$$\sigma^k = \mathrm{id}.$$

Tässä potenssimerkintä tarkoittaa permutaatiokuvauksen yhdistämistä k kertaa itsensä kanssa. Tee seuraavat tehtävät:

(a) Minkälaisia kertalukuja esiintyy ryhmässä S_6?.[1] (2p)

Ratkaisu. Ensimmäinen huomio on, että permutaation id kertaluku on 1. Samaan tapaan huomataan, että 2-kierron (paikanvaihto) kertaluku on 2. Jos yleisesti σ on kierto, jonka pituus on l. Merkitään

$$\sigma = (k_1\ k_2\ \cdots\ k_l)$$

jolloin tehdessä permutaatio σ l kertaa

$$k_i \mapsto k_{i+1} \mapsto k_{i+2} \mapsto \cdots \mapsto k_l \mapsto k_1 \mapsto \cdots \mapsto k_{i-1} \mapsto k_i$$

oli $i = \{1, \ldots, l\}$ mikä hyvänsä. Toisin sanoen

$$\sigma^l = \mathrm{id}$$

eli kierron kertaluku on sen pituus. Permutaatioryhmän S_6 alkiot voidaan aina esittää erillisten kiertojen tuloina, joten sen alkiossa voi esiintyä yksittäisiä kiertoja, joiden pituus $1-6$ näistä saadaan kertaluvut $1-6$. Lisäki kahden 2-kierron tulo tai kolmen 3-kierron tulo esiintyy S_6:ssa, näiden kertaluvut ovat 2 ja 3. Kahden eripituisen kierron tulo kuuluu ryhmään S_6, jos kiertojen pituudet pariutuvat seuraavasti: 2-kierto ja 3-kierto, 2-kierto ja 4-kierto tai 3-kierto ja 3-kierto. Näistä ensimmäisen kertaluku on 6, toisen 4 ja kolmannen 3. Ryhmässä S_6 esiintyy kertaluvut $1-6$. □

(b) Osoita, että jokaisen permutaation $\sigma \in S_n$ kertaluku on äärellinen.[2] (4p)

Todistus. Kuten edellä olleessa tehtävässä osoitimme, l-kierron kertaluku on l. Olkoonpa $\sigma \in S_n$ mikä hyvänsä. Tällöin luentojen lauseen perusteella σ voidaan esittää erillisten kiertojen tulona

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k.$$

Olkoon kierron τ_i pituus $l_i \in \mathbb{N}$. Valitaan luku $l = l_1 l_2 \cdots l_k$, eli l on kaikkien σ:ssa esiintyvien kiertojen kertalukujen tulo. Tehtävän tekemiseksi riittää näyttää, että

$$\sigma^l = \mathrm{id}.$$

---

[1]Mieti kiertoja!

[2]Tähän vinkkeinä seuraavat: Ensimmäiseksi huomaa, että tehtävässä ei kysytä mikä on pienin kertaluku. Toiseksi kannattaa ensin miettiä mikä on kierron kertaluku ja sitten käyttää permutaatioiden esitystä kiertojen tulona.

Huomaa, että kierrot τ_i ovat kaikki erillisiä, jolloin voimme vaihtaa tulojärjestystä miten haluamme ja voimme siten laskea seuraavasti

$$\sigma^l = \tau_1^l \tau_2^l \dots \tau_k^l = (\tau_1^{l_1})^{l/l_1} (\tau_2^{l_2})^{l/l_2} \dots (\tau_k^{l_k})^{l/l_k}.$$

Koska τ_i on kierto, jonka pituus on l_i niin

$$\tau_i^{l_i} = \mathrm{id}$$

kaikille i joten

$$\sigma^l = \mathrm{id}.$$

□

Huomaa, että edellä emme välttämättä löytäneet permutaation σ kertalukua vaan näytimme, että se on pienempi tai yhtäsuuri kuin l. Itseasiassa kertaluku tulee olemaan erillisten kiertojen pituuksien pienin yhteinen jaettava. Kannattaa miettiä erikokoisia hammasrattaita ja niiden pyörittämistä takaisin alkuasentoon.

Pisteytyksessä muutettu alkuperäistä jakoa, a)-kohta 2p ja b)-kohta 4p, sillä tavalla, että jos a)-kohdan ratkaisu sisälsi olennaista tietoa b) kohdan päättelyistä mutta itse todistus vain uupuu niin on sakotettu vain 2p. Kohdaasa a) täysiin pisteisiin riittää jos laskee läpi olennaisesti erilaiset vaihtoehdot. Perustelut antoivat enemmän pisteitä kuin toteamukset.