

# Aikasarjaekonometria, 3 op

Arto Luoma  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
PL 35, (MaD)  
40014 Jyväskylän yliopisto

Kesä 2017

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Volatiliteetin mallintaminen</b>	<b>3</b>
1.1	Ehdollisen heteroskedastisuuden luonnehdintaa . . . . .	4
1.2	ARCH-malli . . . . .	5
1.3	GARCH-malli . . . . .	10
1.4	Integroitunut GARCH-malli . . . . .	12
1.5	GARCH-M-malli . . . . .	13
1.6	Stokastinen volatiliteetti . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Muita yksiulotteisia malleja</b>	<b>17</b>
2.1	Pitkämuistiset mallit . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Moniulotteiset aikasarjat</b>	<b>21</b>
3.1	Heikko stationaarisuus ja ristikorrelaatiofunktio . . . . .	21
3.2	Valkoinen kohina ja lineaarinen prosessi . . . . .	26
3.3	Vektori-autoregressiiviset (VAR) mallit . . . . .	27
3.4	Yksikköjuuri-epästationaarisuus ja yhteisintegroituneisuus . .	31
3.5	Yhteisintegroituneet VAR-mallit . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Moniulotteiset volatiliteettimallit</b>	<b>38</b>
4.1	Ekspontiaalisesti painotettu keskiarvo . . . . .	38
4.2	BEKK-malli . . . . .	39
4.3	GARCH(1,1)-malli . . . . .	41

# Kirjallisuutta

## Pääasialliset lähteet

- Tsay: Analysis of Financial Time Series, Third Edition
- Brockwell, Davis: Introduction to Time Series and Forecasting
- Peters: Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics

## Muuta kirjallisuutta

- Pfaff: Analysis of Integrated and Cointegrated Time Series with R (Use R!)
- Shumway, Stoffer: Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples
- Shiryaev, Kruzhilin: Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory
- Brockwell, Davis: Time Series: Theory and Methods (lyh. TSTM).
- Cryer, Chan: Time Series Analysis With Applications in R
- Cowpertwait, Metcalfe: Introductory Time Series with R (Use R!)

# Luku 1

## Volatiliteetin mallintaminen

Monissa finanssiaikasarjoissa esiintyy hajonnan eli volatiliteetin vaihtelua, mitä mallinnetaan ehdollisen heteroskedastisuuden malleilla sekä stokastisen volatiliteetin malleilla. Tyypillisimmin volatiliteetin vaihtelu esiintyy osakkeiden tuottosarjoissa. Yleensä tarkastellaan ns. *log-tuottoja*

$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = p_t - p_{t-1},$$

missä  $P_t$  on osakkeen hinta ajanhetkellä  $t$  ja  $p_t = \ln(P_t)$ .

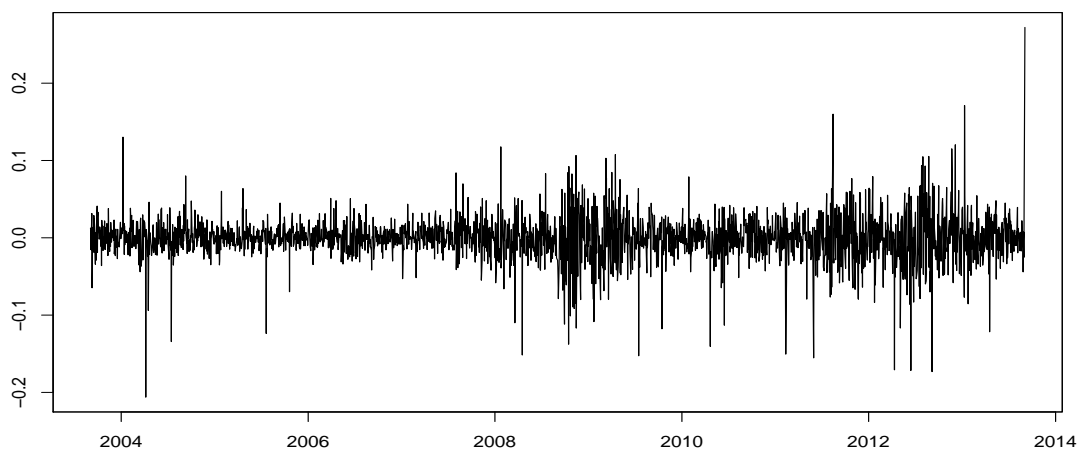
Tuottosarjojen volatiliteetin mallintaminen on erityisen kiinnostuksen kohteena mm. seuraavista syistä: 1) Optioiden hinnoittelussa käytettävä Black-Scholes-kaava perustuu tuottosarjan volatiliteettiin. 2) Volatiliteetin avulla voidaan laskea riskienhallinnassa käytettävä *value at risk* (VaR) - luku. 3) Volatiliteetillä on tärkeä osa sijoitussalkun optimoinnissa pyrittäessä maksimoimaan tuoton odotusarvoa ja minimoimaan sen varianssia. 4) Volatiliteetin huomioon ottaminen parantaa aikasarjan parametrien estimointitarkkuutta ja sitä kautta myös ennustetarkkuutta. 5) Volatiliteetti-indeksistä (VIX) on tullut rahoitusväline. (Tsay, luku 3).

Volatiliteetti itsessään ei ole havaittava suure. Sen sijaan sitä voidaan pyrkiä estimoimaan monin tavoin. Sen lisäksi, että se voidaan estimoida suoraan historiallisen aikasarjan avulla, se voidaan epäsuorasti ratkaista optioiden hinnoittelukaavasta käyttämällä havaittuja optioiden hintoja. Tällöin puhutaan ns. *implisiittisestä volatiliteetistä* (implied volatility). Myös VIX-indeksi perustuu implisiittiseen volatiliteettiin.

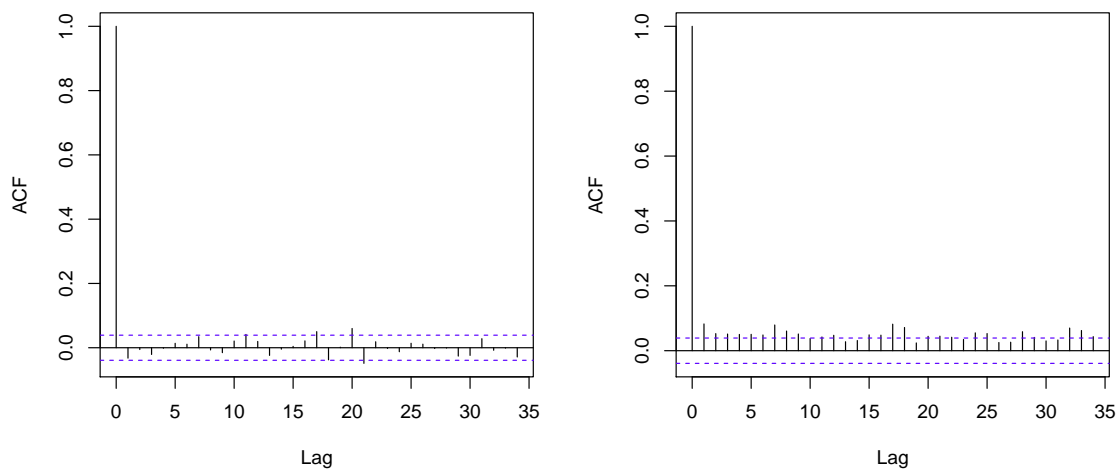
## 1.1 Ehdollisen heteroskedastisuuden luonnehdintaa

Volatiliteetin vaihtelulla tarkoitetaan varianssin ryvästymistä, joka voidaan havaita monien finanssiaikasarjan kuvaajasta. Ilmiötä voidaan mallintaa mm. *autoregressiivisillä ehdollisen heteroskedastisuuden* (ARCH) malleilla. Siksi puhutaan ns. *ARCH-efektistä*. Aikasarjojen peräkkäisten havaintojen välillä ei välttämättä ole autokorrelaatiota tai se voi olla hyvin heikkoa. Sen sijaan voidaan havaita havaintojen neliöiden tai itseisarvojen välinen autokorrelaatio joko ACF- ja PACF -funktioista tai erilaisten testien avulla.

Kuviossa 1.1 on Nokian osakkeen tuottosarja aikaväliltä 4.9.2003 – 3.9.2013. ARCH-efekti tulee selvästi näkyviin näin pitkässä sarjassa. Kuviossa 1.2 on piirretty alkuperäisen ja neliöidyn tuottosarjan ACF. Vaikka havainnot ovat korreloimattomia, samaa ei voi sanoa neliöidyistä havainnoista. Myös Ljung-Box-testit osoittavat saman ilmiön.



Kuvio 1.1: Nokian osaketuottosarja 4.9.2003 – 3.9.201



(a) Havaintojen ACF

(b) Neliöityjen havaintojen ACF.

Kuvio 1.2: Nokian osaketuottosarjan ACF

```
1> Box.test(x,lag=40,type="Ljung")
```

Box-Ljung test

X-squared = 55.5122, df = 40, p-value = 0.05232

```
1> Box.test(x^2,lag=40,type="Ljung")
```

Box-Ljung test

X-squared = 238.0425, df = 40, p-value < 2.2e-16

## 1.2 ARCH-malli

Tähän mennessä käsitellyt stationaariset aikasarjat ovat olleet kausaalisia ARMA-prosesseja, joilla on liukuvan keskiarvon esitysmuoto

$$X_t = Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi_2 Z_{t-2} + \dots, \quad Z_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2).$$

Aikasarja  $\{X_t\}$  siis on lineaarinen kombinaatio valkoisen kohinan prosessista  $\{Z_t\}$ . Yleisemmissä epälineaarisisa malleissa lähtökohtana on IID(0,1)-prosessi  $\{Z_t\}$  (havainnot  $Z_t$  ovat samoin jakautuneita ja riippumattomia satunnaismuuttujia odotusarvolla 0 ja varianssilla 1) ja  $X_t$  voidaan ilmoittaa sarjan  $\{Z_t\}$  havaintojen epälineaarisenä funktiona. Kausaalisuus tässä yleisemmässä yhteydessä tarkoittaa sitä, että  $X_t$  voidaan ilmoittaa havaintojen  $Z_s, s \leq t$ , funktiona. Kausaalisuudesta seuraa, että  $Z_t$  on riippumaton havaintojen  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$  kanssa.

Yleisimmin käytettyjä epälineaarisia malleja on ARCH-prosessi (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity), jonka avulla voidaan mallintaa aikasarjan varianssia tai hajontaa (volatiliteettia). Sanotaan, että  $\{X_t\}$  noudattaa ARCH(q)-prosessia, jos

$$X_t = \sigma_t Z_t, \text{ missä } Z_t \sim IID(0, 1), \text{ ja} \quad (1.1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_2 X_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q X_{t-q}^2. \quad (1.2)$$

Jotta  $\sigma_t^2$  olisi aina positiivinen, oletetaan lisäksi, että  $\alpha_0 > 0$  ja  $\alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, q$ .

**Esim. 1.** *ARCH(1)-prosessi.* Kun  $\{X_t\}$  on kausaalinen ja  $\alpha_1 < 1$ , voidaan osoittaa (ks. Brockwell&Davis) että sillä on epälineaarinen esitysmuoto

$$X_t = Z_t \sqrt{\alpha_0 \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_1^j Z_{t-1}^2 \dots Z_{t-j}^2 \right)},$$

jonka perusteella voidaan päätellä, että  $\{X_t\}$  on vahvasti stationaarinen. Lisäksi voidaan laskea, että  $E X_t^2 = \alpha_0 / (1 - \alpha_1) < \infty$ , joten se on myös heikosti stationaarinen.

Eräissä sovelluksissa oletetaan myös korkeampien momenttien olemassaolo sarjalle  $\{X_t\}$ . Tästä seuraa lisärajoitus  $\alpha_1$ :lle. Oletetaan seuraavassa tarkastelussa, että prosessi  $\{Z_t\}$  on normaalin, jolloin  $E Z_t^4 = 3$ . Merkitään hetkeen  $t$  mennessä kertynyttä informaatiota  $\mathcal{F}_t$ , ts. havaintojen  $X_t, X_{t-1}, \dots$  antamaa informaatiota. Tällöin

$$E(X_t^4 | \mathcal{F}_{t-1}) = E(\sigma_t^4 Z_t^4 | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^4 E(Z_t^4 | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^4 E(Z_t^4) = 3\sigma_t^4,$$

joten

$$E X_t^4 = E[E(X_t^4 | \mathcal{F}_{t-1})] = 3E(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2 = 3E(\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_1^2 X_{t-1}^4).$$

Jos  $X_t$  on neljänteen momenttiin asti stationaarinen, ja merkitään  $m_4 = \mathbf{E}X_t^4$ , niin

$$\begin{aligned} m_4 &= 3[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1\mathbf{Var}(X_t) + \alpha_1^2 m_4] \\ &= 3\alpha_0^2 \left(1 + 2\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}\right) + 3\alpha_1^2 m_4, \end{aligned}$$

mistä saadaan ratkaistua

$$m_4 = \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)}.$$

Jotta ratkaisu olisi positiivinen, on asetettava lisäehto  $\alpha_1^2 < \frac{1}{3}$ . Huipukkuus (kurtositeetti) on

$$\frac{\mathbf{E}X_t^4}{[\mathbf{Var}(X_t)]^2} = 3\frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2} > 3.$$

Tämä on suurempi kuin normaalijakauman huipukkuus 3, joten ARCH(1)-malli selittää osittain tuottosarjoissa havaittavan huipukkuuden.

Jos ARCH(q)-prosessilla  $\{X_t\}$  on äärellinen varianssi  $\sigma^2$ , voidaan helposti helposti osoittaa, että se on valkoisen kohinan prosessi (vaikka se ei ole IID-prosesi).

Ensinnäkin prosessin odotusarvo on 0, sillä

$$\mathbf{E}(X_t) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_t|\mathcal{F}_{t-1})) = \mathbf{E}(\sigma_t \mathbf{E}(Z_t|\mathcal{F}_{t-1})) = \mathbf{E}(\sigma_t \mathbf{E}(Z_t)) = 0.$$

Toinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että  $\sigma_t$  voidaan palauttaa satunnaismuuttujiin  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-q}$ . Kolmas yhtäsuuruus seuraa siitä, että kausaalisuuden perusteella  $Z_t$  on riippumaton informaatiosta  $\mathcal{F}_{t-1}$ .

Toiseksi  $\sigma^2 = \mathbf{E}X_t^2 = \mathbf{E}(\sigma_t^2 Z_t^2) = \mathbf{E}(\sigma_t^2)\mathbf{E}(Z_t^2) = \mathbf{E}\sigma_t^2$ , missä kolmas yhtäsuuruus perustuu siihen että  $\sigma_t^2$  ja  $Z_t$  ovat riippumattomia. Riippumattomuus perustuu siihen, että  $\sigma_t^2$  voidaan palauttaa satunnaismuuttujiin  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-q}$ , jotka ovat kausaalisuuden perusteella riippumattomia  $Z_t$ :n kanssa. Ottamalla odotusarvo puolittain yhtälöstä (1.2) saadaan

$$\sigma^2 = \alpha_0 + \alpha_1\sigma^2 + \dots + \alpha_q\sigma^2,$$

josta saadaan ratkaistua  $\sigma^2 = \alpha_0/(1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q)$ . Havainnot  $X_{t+h}$  ja  $X_t$  ovat korreloimattomia, sillä

$$\mathbf{E}(X_{t+h}X_t) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_{t+h}X_t|\mathcal{F}_{t+h-1})) = \mathbf{E}(X_t\sigma_{t+h}\mathbf{E}(Z_{t+h}|\mathcal{F}_{t+h-1})) = 0.$$

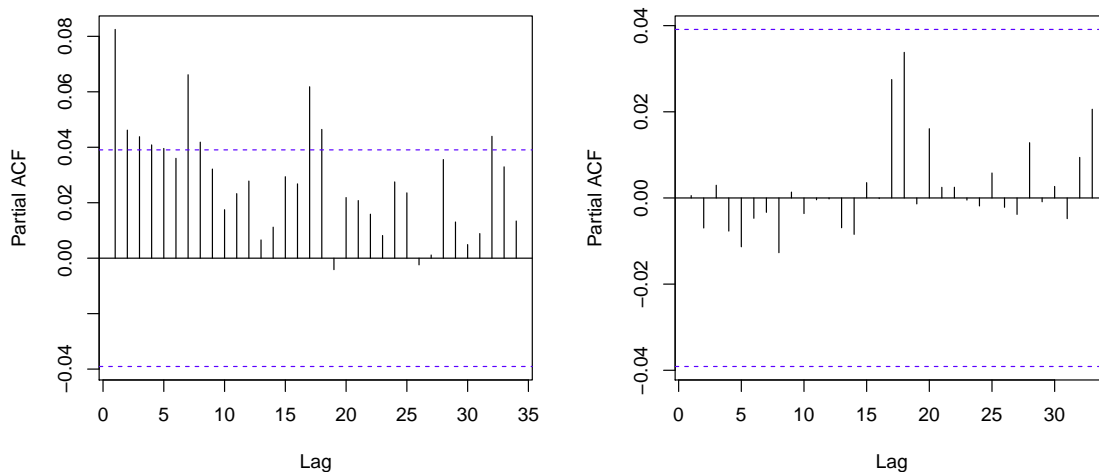


Lisäämällä yhtälöön (1.2) puolittain  $X_t^2 - \sigma_t^2$  saadaan

$$X_t^2 = \alpha_0 + W_t + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q X_{t-q}^2,$$

missä  $W_t = X_t^2 - \sigma_t^2$ . ARCH(q)-prosessi voidaan siis tulkita neliöityjen havaintojen AR(q)-prosessiksi, missä virheprosessina on  $\{W_t\}$ . Prosessi  $\{W_t\}$  on valkoisen kohinan prosessi, mikäli parametrit  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  on rajoitettu siten, että  $EX_t^4 < \infty$  (harjoitustehtävä). Tämän vuoksi sopiva viivepituus  $q$  voidaan pyrkiä määrittämään tarkastelemalla havaintojen  $X_t^2$  otososittaisautokorrelaatiofunktiota. Tämä menetelmä ei kuitenkaan ole välttämättä kovin tehokas.

Kuviossa 1.3a nähdään neliöityjen Nokia-tuottojen PACF. Osittaisautokorrelaatio näyttää häviävän viiveen 8 jälkeen, joten voisimme sovittaa ARCH(8)-mallia. Myös viiveillä 17 ja 18 näkyy merkittäviä piikkejä, mutta nämä voivat olla 'sattumaa'. Kuvion oikeassa osassa on piirretty ARCH-mallin sovittamisesta saatujen neliöityjen jäännösten PACF, ja näyttää siltä, että autokorrelaatio on hävinnyt. Sovittamisessa käytettiin `tseries`-paketin funktiota `garch`.

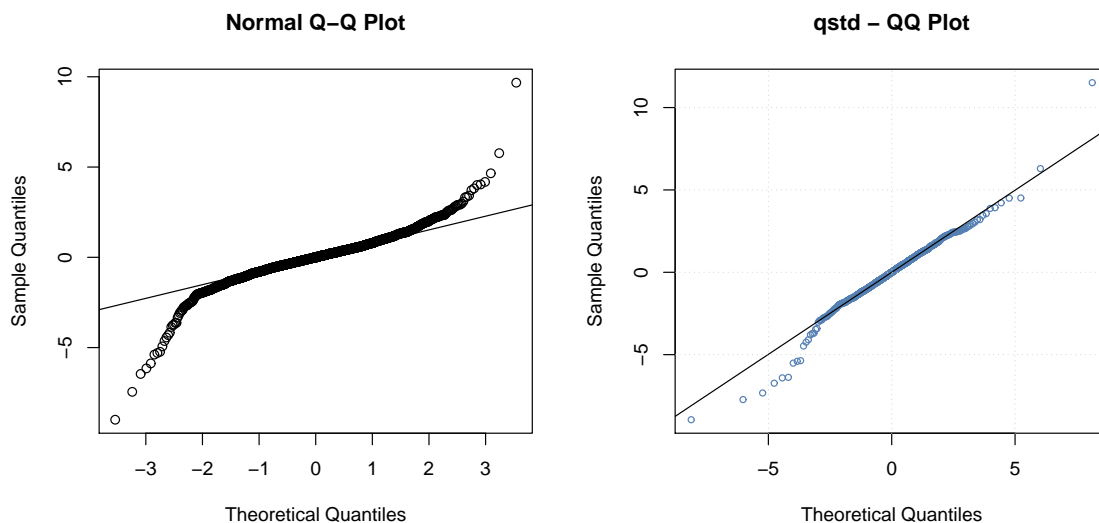


(a) Neliöityjen havaintojen PACF

(b) Neliöityjen jäännösten PACF.

Kuvio 1.3: Nokian osaketuottosarjaan liittyviä osittaisautokorrelaatiokuvioita. Jäännökset on saatu sovittamalla ARCH(8)-malli.

Kuviossa 1.4a on piirretty jäännösten QQ-kuvio. Sen perusteella ARCH-malli ei yksin selitä havaittua huipukkuutta. Teemme toisen sovituksen käyttämällä `fGarch`-pakettiin sisältyvää funktiota `garchFit`, jolloin innovaatioprosessin  $\{Z_t\}$  jakaumaksi voidaan asettaa Studentin t-jakauma. Oikeanpuoleisessa QQ-kuviossa jäännösten jakaumaa verrataan estimoituun t-jakaumaan, ja nyt sopivuus näyttää paremmalta.



(a) Normaalijakauman QQ-kuvio

(b) Studentin t-jakauman QQ-kuvio.

Kuvio 1.4: Nokian osaketuottosarjaan sovitetun ARCH(8)-mallin jäännösten QQ-kuvioita

Studentin t-jakauman muotoparametrin  $\nu$  estimaatiksi saadaan 3.783, mikä tarkoittaa sitä, että jakaumalla ei ole 4. momenttia. Tällöin on kyseenaista piirtää ACF tai PACF neliöidyille jäännöksille, koska niiden teoreettista vastinetta ei ole olemassa. Tosin muotoparametri ei ole merkitsevästi poikkea 4:stä.

```
pacf(x^2,main="")
library(garch)
a <- garch(x,order=c(0,8),trace=FALSE)
pacf(a$res[-(1:8)]^2,main="")
qqnorm(a$res)
qqline(a$res)
```

```

library(fGarch)
a2 <- garchFit(~garch(8,0),data=x,trace=FALSE,include.mean=FALSE,
               cond.dist="std")
plot(a2)
summary(a2)

```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
omega	2.058e-04	2.703e-05	7.613	2.69e-14	***
alpha1	2.226e-01	5.313e-02	4.189	2.80e-05	***
alpha2	9.029e-02	3.908e-02	2.310	0.02086	*
alpha3	6.424e-02	3.668e-02	1.751	0.07987	.
alpha4	7.380e-02	3.904e-02	1.890	0.05870	.
alpha5	1.606e-01	5.379e-02	2.985	0.00284	**
alpha6	6.240e-02	3.198e-02	1.951	0.05101	.
alpha7	9.101e-02	3.704e-02	2.457	0.01401	*
alpha8	1.632e-01	5.046e-02	3.234	0.00122	**
shape	3.783e+00	2.884e-01	13.117	< 2e-16	***

### 1.3 GARCH-malli

Usein ARCH-efektiä ei pystytä mallintamaan vähäparametrisella ARCH-mallilla. Tehokkaampi malli tässä suhteessa on yleistetty versio ARCH-prosessista, GARCH (Generalized ARCH). Prosessin  $\{X_t\}$  sanotaan noudattava GARCH(p,q)-prosessia, jos yhtälö (1.2) on korvattu yhtälöllä

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q X_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2. \quad (1.3)$$

Jotta  $\sigma_t^2$  olisi aina positiivinen, oletetaan, että  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_q \geq 0$ ,  $\beta_1 \geq 0, \dots, \beta_p \geq 0$ .

Lisäämällä yhtälöön puolittain  $W_t = X_t^2 - \sigma_t^2$  ja järjestelemällä termejä yhtälö voidaan esittää muodossa

$$X_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) X_{t-1}^2 + \dots + (\alpha_r + \beta_r) X_{t-r}^2 + W_t - \beta_1 W_{t-1} - \dots - \beta_p W_{t-p}, \quad (1.4)$$

missä  $r = \max(p, q)$  ja  $\alpha_j = 0$ , kun  $j > q$ , ja  $\beta_j = 0$ , kun  $j > p$ . Nähdään siis, että GARCH(p,q)-prosessi on ARMA(r,p)-prosessi neliöidylle sarjalle. GARCH-prosessilla voidaan siis selittää neliöidyssä sarjassa esiintyvää auto-korrelaatiota, mikäli neliöidyllä sarjalla on äärellinen varianssi.

Jos  $(\alpha_1 + \beta_1) + \dots + (\alpha_r + \beta_r) < 1$ , GARCH-prosessi on stationaarinen ja sen ei-ehdollinen varianssi on  $\sigma^2 = \alpha_0 / (1 - (\alpha_1 + \beta_1) - \dots - (\alpha_r + \beta_r))$  (harjoitustehtävä).

Kun oletetaan, että  $Z_t \sim N(0, 1)$ , suurimman uskottavuuden funktio GARCH-prosessille on

$$L(\alpha, \beta) = \prod_{t=q+1}^n f_t(x_t | x_{t-1}, \dots, x_{t-q}, \sigma_{t-1}^2, \dots, \sigma_{t-p}^2) = \prod_{t=q+1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{x_t^2}{\sigma_t^2} \right\},$$

missä on ehdollistettu havaintojen  $X_1, \dots, X_q$  ja tuntemattomien ehdollisten varianssien  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2$  suhteen. Arvot  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2$  voidaan korvata sarjan  $\{X_t\}$  ensimmäisten havaintojen varianssilla. Maksimoilla uskottavuusfunktiota numeerisesti parametrien suhteen saadaan niille SU-estimaatit.

Melkein aina käytännön mallinnuksessa riittävät matala-asteiset mallit GARCH(1,1), GARCH(1,2) ja GARCH(2,1). Useimmiten selvittäään jo GARCH(1,1)-mallilla.

Tarkastellaan seuraavaksi varianssin ennustamista GARCH(1,1)-mallin avulla. Oletetaan, että  $X_t$  ja  $\sigma_t^2$  ovat tunnettuja ajanhetkellä  $h$ , ja merkitään  $l$  askelen ennustetta  $\sigma_h^2(l)$ . Yhden aika-askelen ennuste on

$$\sigma_h^2(1) = \sigma_{h+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2.$$

Käyttämällä hyväksi yhtälöä  $X_t^2 = \sigma_t^2 Z_t^2$ , yhtälö 1.3 voidaan esittää muodossa

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_t^2 + \alpha_1 \sigma_t^2 (Z_t^2 - 1),$$

kun  $p = q = 1$ . Kun  $t = h + 1$ , yhtälöstä tulee

$$\sigma_{h+2}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_{h+1}^2 + \alpha_1 \sigma_{h+1}^2 (Z_{h+1}^2 - 1).$$

Koska  $E(Z_{h+1}^2 - 1 | \mathcal{F}_h) = 0$ , kahden askelen ennuste toteuttaa yhtälön

$$\sigma_h^2(2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_h^2(1).$$

Yleisesti

$$\sigma_h^2(l) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_h^2(l-1), \quad l > 1. \quad (1.5)$$

Tämän rekursion perusteella voidaan johtaa (harjoitustehtävä) yleinen kaava

$$\sigma_h^2(l) = \frac{\alpha_0 [1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{l-1}]}{1 - \alpha_1 - \beta_1} + (\alpha_1 + \beta_1)^{l-1} \sigma_h^2(1).$$

Sovitetaan lopuksi aiemmin tässä luvussa analysoituun Nokian tuotto-sarjaan GARCH(1,1)-malli. Nyt onnistutaan selittämään ehdollinen heteroskedastisuus vähemmillä parametreilla. AIC on nyt -4.67, kun se ARCH(8)-mallin tapauksessa oli -4.64. Huomaa, että `fGarch` 'standardoi' informaatio-kriteerit jakamalla ne havaintojen lukumäärällä.

```
b <- garchFit(~garch(1,1),data=x,trace=FALSE,include.mean=FALSE,cond.dist="std")
summary(b)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
omega	2.426e-06	1.165e-06	2.082	0.0374	*
alpha1	3.742e-02	6.441e-03	5.810	6.25e-09	***
beta1	9.613e-01	6.123e-03	156.989	< 2e-16	***
shape	3.919e+00	2.932e-01	13.364	< 2e-16	***

Information Criterion Statistics:

AIC	BIC	SIC	HQIC
-4.665666	-4.656403	-4.665671	-4.662304

## 1.4 Integroitunut GARCH-malli

Jos AR-polynomilla GARCH-mallin esitysmuodossa 1.3 on yksikköjuuri, kyseessä on IGARCH-malli. Tällöin ehdollisella varianssilla  $\{\sigma_t^2\}$  on satunnaiskävelyä muistuttava käyttäytyminen. Innovaatioiden  $W_t = X_t^2 - \sigma_t^2$  vaikutus sarjan tulevien havaintojen varianssiin jää pysyväksi. Prosessi  $\{\sigma_t^2\}$  ei ole heikosti stationaarinen, koska sillä ei ole kahta ensimmäistä momenttia. Sen sijaan se saattaa olla vahvasti stationaarinen.

IGARCH(1,1)-prosessi on muotoa

$$X_t = \sigma_t Z_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1) X_{t-1}^2,$$

missä  $0 < \beta_1 < 1$  ja  $\{Z_t\} \sim \text{IID}(0, 1)$ . Tälle mallille saadaan yhtälöstä 1.3  $l$  askelen ennusteeksi

$$\sigma_h^2(l) = \sigma_h^2(1) + (l - 1)\alpha_0.$$

Siis ehdollisen varianssin ennuste kasvaa lineaarisesti kulmakertoimella  $\alpha_0$ .

Kun  $\alpha_0 = 0$ , saadaan mielenkiintoinen erikoistapaus. Tällöin

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= (1 - \beta_1)X_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 \\ &= (1 - \beta_1)X_{t-1}^2 + \beta_1[(1 - \beta_1)X_{t-2}^2 + \beta_1\sigma_{t-2}^2] \\ &= \dots \\ &= (1 - \beta_1)(X_{t-1}^2 + \beta_1X_{t-2}^2 + \beta_1^2X_{t-3}^2 + \dots),\end{aligned}$$

joten  $\{\sigma_t^2\}$  saadaan eksponentiaalisella tasoituksella prosessista  $\{X_t\}$ , kun tasoitusparametrina on  $\beta_1$ .

Kun Nokian tuottosarja estimoitiin GARCH(1,1)-mallilla saatiin ratkaisu, joka on hyvin lähellä IGARCH-prosessia, sillä  $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 = 0.99872$  on hyvin lähellä ykköstä. Parametrin  $\alpha_0$  ('omega') estimaatti ei ole kovin merkitsevä, joten eksponentiaalisen tasoituksen malli saattaisi olla hyvä approksimaatio kyseiselle aikasarjalle.

## 1.5 GARCH-M-malli

Rahoitusteoriassa arvopaperin tuoton odotusarvo ja varianssi ovat usein sidoksissa toisiinsa. Yksi tapa mallintaa tätä ilmiötä ovat GARCH in mean (GARCH-M) -mallit. Yksinkertainen GARCH(1,1)-M-malli voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned}Y_t &= \mu + c\sigma_t^2 + X_t, & X_t &= \sigma_t Z_t, \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Tässä  $c$  on ns. riskilisäparametri (risk premium parameter). Jos  $c$  on positiivinen, se tarkoittaa sitä, että tuotto-odotus kasvaa riskin lisääntyessä. Muita mahdollisia määrittelyitä riskilisälle ovat  $Y_t = \mu + c\sigma_t + X_t$  ja  $Y_t = \mu + c \ln(\sigma_t^2) + X_t$ .

GARCH-M-mallin määrittelystä 1.6 seuraa, että prosessi  $\{Y_t\}$  on autokorreloitunut. Tämä aiheutuu prosessin  $\{\sigma_t^2\}$  autokorreloituneisuudesta. GARCH-M on siis yksi mahdollinen selitys, jos tuottosarjassa havaitaan autokorrelaatiota.

## 1.6 Stokastinen volatilitiitti

GARCH-mallissa oletetaan, että volatilitiitti voidaan ilmoittaa edeltävien havaintojen funktiona. Sen sijaan stokastisen volatilitiitin malleissa volati-

liteetti on latentti, ei-havaittava prosessi, joka pitää estimoida mallin tuntemattomien parametrien lisäksi. Yksinkertaisin versio mallista on muotoa

$$\begin{aligned} X_t &= \sigma_t Z_t, \\ h_t &= \phi_0 + \phi_1 h_{t-1} + \eta_t, \end{aligned}$$

missä  $h_t = \log(\sigma^2)$ ,  $\{\eta_t\} \sim \text{IID}N(0, \sigma_\eta^2)$  ja  $\{Z_t\} \sim \text{IID}N(0, 1)$ .

Siis log-volatiliteettia mallinnetaan tavallisella AR(1)-prosessilla. Yleisemmin voitaisiin käyttää AR(p)-prosessia. Logaritmoitimuunnoksella saavutetaan volatiliteetin jakauman symmetrisoinnin lisäksi se, että volatiliteetin ennusteet pysyvät positiivisina.

AR(1)-prosessin ominaisuuksista seuraa, että jos  $|\phi_1| < 1$ , niin volatiliteettiprosessi on stationaarinen ja sen stationaarinen jakauma on

$$\{h_t\} \sim N\left(\frac{\phi_0}{1 - \phi_1}, \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_1^2}\right) \doteq N(\mu_h, \sigma_h^2).$$

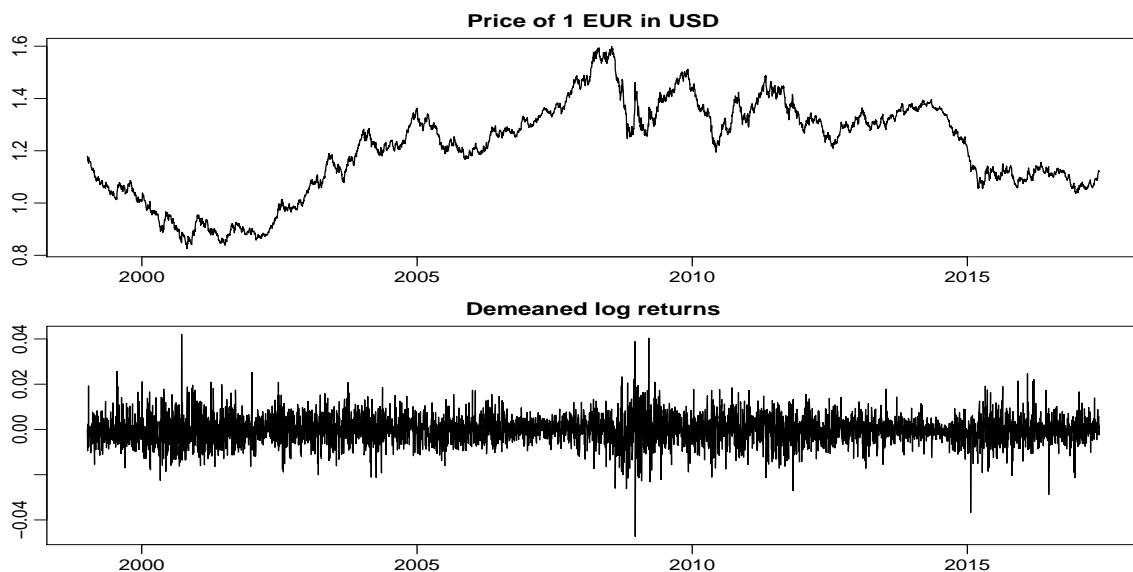
Stokastinen volatiliteettimalli tarjoaa lisää joustavuutta mallintamiseen mutta on vaativampi estimoida. Mahdollisia tekniikoita ovat MCMC (bayesiläinen lähestymistapa), kvasi-suurimman uskottavuuden menetelmä menetelmä ja EM-algoritmi (ks. Shumway& Stoffer viitteineen). Shumway ja Stoffer esittävät kaksi ratkaisua, joista ensimmäinen hyödyntää Kalman suodinta ja satunnaismuuttujan  $\log(Z_t^2)$  approksimointia kahden normaalijakauman sekajakaumana ja toinen bootstrap-menetelmää.

Esitämme seuraavaksi mallin sovituksen käyttäen R-pakettia `stochvol`, joka perustuu bayesiläiseen lähestymistapaan ja MCMC-laskentaan, ks. Kastner (2016), *Dealing with Stochastic Volatility in Time Series Using the R Package stochvol*, *Journal of Statistical Software* (<https://www.jstatsoft.org/article/view/v069i05>). Esimerkkinä on dollarin ja euron vaihtokurssi aikaväliltä 4.1.1999 – 25.5.2017 (lähde ECB Statistical Data Warehouse, <http://sdw.ecb.europa.eu>), ks. kuvio 1.5.

Bayes-lähestymistavassa tuntemattomille parametreille on määriteltävä priorijakaumat. Paketti `stochvol` käyttää seuraavia jakaumia:

$$\begin{aligned} \mu_h &\sim N(b_\mu, B_\mu), \\ (\phi_1 + 1)/2 &\sim \text{Beta}(a_0, b_0), \\ \sigma_\eta^2 &\sim B_{\sigma_\eta} \times \chi_1^2. \end{aligned}$$

Olettaen, että vaihtokurssin log-tuottosarja on tallennettu olioon `ret`, seuraavassa on tarvittava koodi ja tulokset:



Kuvio 1.5: EUR/USD vaihtokurssi ja sen log-tuottosarja

```
res <- svsample(ret, priormu = c(-10, 1), priorphi = c(20, 1.1), priorsigma = .1)
summary(res, showlatent = FALSE)
volplot(res, forecast = 250, dates = Exrates$date[-1])
```

Summary of 10000 MCMC draws after a burn-in of 1000.

Prior distributions:

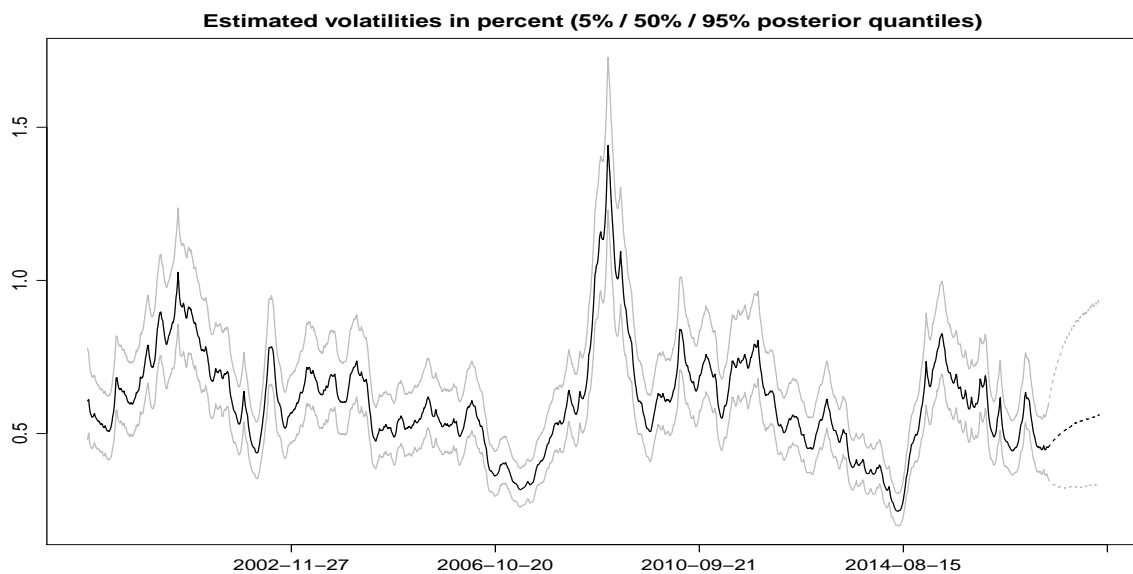
```
mu ~ Normal(mean = -10, sd = 1)
(phi+1)/2 ~ Beta(a0 = 20, b0 = 1.1)
sigma^2 ~ 0.1 * Chisq(df = 1)
```

Posterior draws of parameters (thinning = 1):

	mean	sd	5%	50%	95%	ESS
mu	-10.2964	0.15330	-10.5393	-10.2985	-10.0474	7401
phi	0.9919	0.00277	0.9870	0.9921	0.9960	222
sigma	0.0767	0.01026	0.0610	0.0760	0.0944	114
exp(mu/2)	0.0058	0.00046	0.0051	0.0058	0.0066	7401
sigma^2	0.0060	0.00163	0.0037	0.0058	0.0089	114

Kuvio 1.6 näyttää estimoidun volatilitietin posteriorimediaanin ja 90%





Kuvio 1.6: EUR/USD vaihtokurssin estimoitu volatilitteetti ja ennuste vuodeksi eteenpäin. Käyrät näyttävät posteriorimediaanit sekä 5% ja 95% kvanttiilit. Ennuste on osoitettu katkoviivoin.

posteriorivälin. Lisäksi nähdään ennuste 250 työpäivää eteenpäin. Kuvio on tuotettu funktiolla `volplot`. Paketin `stochvol` avulla on mahdollista tuottaa paljon muitakin hyödyllisiä kuvioita.

# Luku 2

## Muita yksiulotteisia malleja

### 2.1 Pitkämuistiset mallit

Stationaaristen ARMA-prosessien autokorrelaatiofunktio lähestyy eksponentiaalisen nopeasti nollaa siinä mielessä, että on olemassa sellainen  $r > 1$ , että

$$r^h \rho(h) \rightarrow 0, \text{ kun } h \rightarrow 0.$$

Toisaalta epästationaarisen yksikköjuuriprosessin tapauksessa voidaan osoittaa, että *otosautokorrelaatiokerroin* lähestyy kaikilla viiveillä ykköstä.

On myös aikasarjamalleja, joissa autokorrelaatiokerroin lähestyy nollaa polynomiaalisella nopeudella. Esimerkkinä on fraktionaalisesti integroitunut ARMA-prosessi (ARFIMA), joka on ARIMA(p,d,q)-prosessi, missä  $0 < |d| < 0.5$ . Prosessi toteuttaa yhtälön

$$(1 - \mathbf{B})^d \phi(\mathbf{B}) X_t = \theta(\mathbf{B}) Z_t, \quad (2.1)$$

missä  $\phi(\cdot)$  on AR(p)-polynomi,  $\theta(\cdot)$  on MA(q)-polynomi ja näiden polynomien nollakohdat ovat yksikköympyrän ulkopuolella ja  $\{Z_t\}$  valkoisen kohinan prosessi. Operaattori  $(1 - \mathbf{B})^d$  määritellään binomisarjan avulla:

$$(1 - \mathbf{B})^d = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \mathbf{B}^j,$$

missä  $\pi_0 = 1$  ja

$$\pi_j = \frac{-d(1-d)\dots(j-1-d)}{j!}.$$

ARFIMA-prosessin autokorrelaatiolla on ominaisuus

$$\rho(h)h^{1-2d} \rightarrow c, \text{ kun } h \rightarrow \infty,$$

joten se suppenee nollaa kohti paljon hitaammin kuin ARMA. Siksi tällaista prosessia sanotaan *pitkämuistiseksi*.

ARFIMA-prosessi voidaan tulkita ARMA-prosessiksi fraktionaalisesti integroituneella kohinalla, sillä 2.1 voidaan esittää muodossa

$$\phi(\mathbf{B})X_t = \theta(\mathbf{B})W_t,$$

missä

$$(1 - \mathbf{B})^d W_t = Z_t.$$

Prosessia  $\{W_t\}$  kutsutaan *fraktionaalisesti integroituneeksi valkoiseksi kohinaksi*, ja sen varianssi on (ks. esim. TSTM, luku 13.2)

$$\gamma(0) = \sigma^2 \frac{\Gamma(1 - 2d)}{\Gamma^2(1 - d)}$$

ja korrelaatio

$$\rho(h) = \frac{\Gamma(h + d)\Gamma(1 - d)}{\Gamma(h - d + 1)\Gamma(d)},$$

missä  $\Gamma(\cdot)$  on gamma-funktio.

Normaaliseen uskottavuusfunktioon perustuva estimointi on laskennallisesti hidaskäyttöinen ja muistia kuluttava. Estimointia voidaan kuitenkin helpottaa siirtymällä taajuusalueeseen. ARFIMA-prosessin  $\{X_t\}$  spektritiheysfunktio on

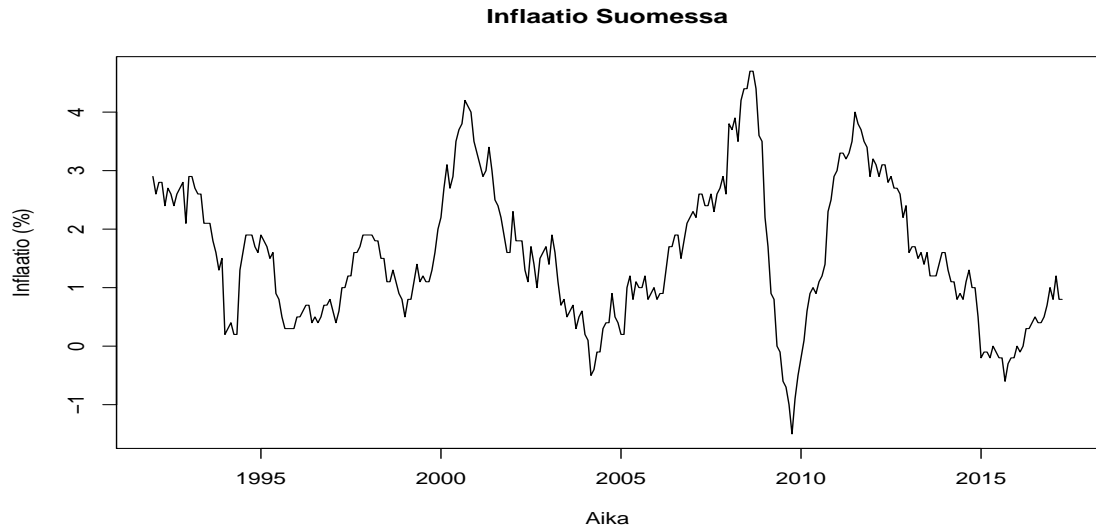
$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2} |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d}.$$

Whittlen approksimaatiossa oletetaan, että diskreetin Fourier-muunnoksen arvot

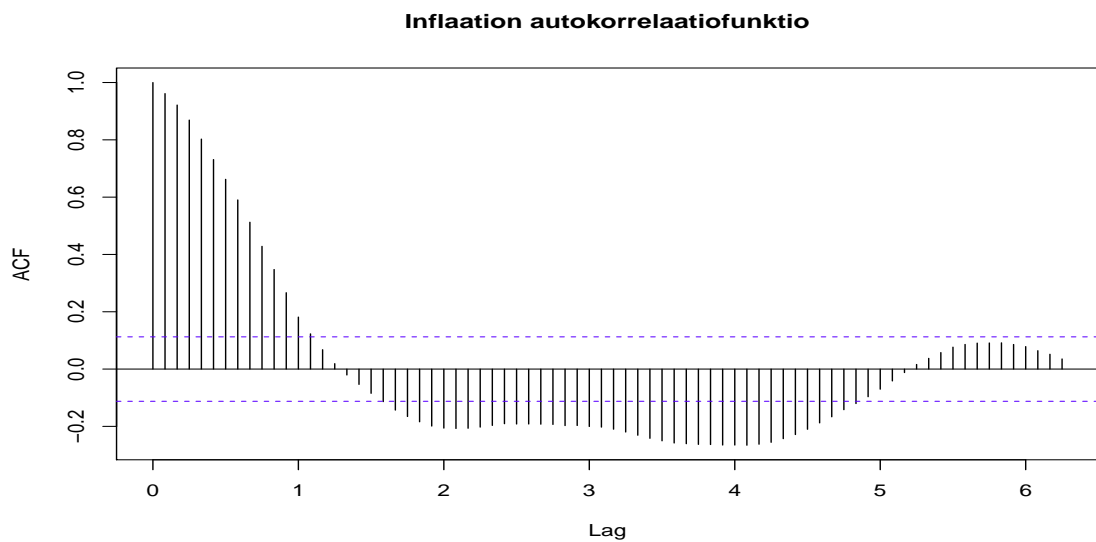
$$d_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n x_t e^{-it\omega_k}$$

Fourierin taajuuksilla  $\omega_k = 2\pi k/n$ ,  $0 < k < n/2$  ovat likimain riippumattomia ja kompleksisesti normaalijakautuneita odotusarvolla 0 ja varianssilla  $f(\omega_k)$ . Tähän approksimaatioon perustuva log-kvasiuskottavuusfunktio on

$$L(\theta; x) = -\frac{1}{2} \sum_{0 < k < n/2} \left( \log(f(\omega_k)) + \frac{|d(\omega_k)|^2}{f(\omega_k)} \right).$$



Kuvio 2.1: Inflaatioaikaasarja näyttää lähes satunnaiskävelyä.



Kuvio 2.2: Inflaatioaikaasarjassa pitkämuistista autokorrelaatiota.

Kuviossa näemme Suomen inflaation vuodesta 1992 alkaen. Sarja käy stationarisesta mutta on toisaalta kuin satunnaiskävelyä. Tätä voi hyvin

mallintaa pitkämuistisella korrelaatiomallilla. Kuvassa näemme otosautokorrelaatiofunktion, joka säilyy merkitseväenä noin viiden vuoden ajalta.

R-paketin `fracdiff` avulla on mahdollista sovittaa ARFIMA-malleja. Valitettavasti paketissa ei ole valmiina diagnostiikkoja kuten jäännössarjojen piirtämistä vaan nämä joutuu koodailemaan itse. Seuraavassa estimointituloksia:

```
library(fracdiff)
inf2 <- window(inf,start=1992)
inf3 <- inf2-mean(inf2)
summary(fracdiff(inf3,nar=2,nma=0,M=30)
Coefficients:
Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
d  0.349303  0.001066  327.65 < 2e-16 ***
ar1 0.627091  0.053796  11.66 < 2e-16 ***
ar2 0.252007  0.054080   4.66 3.16e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
sigma[eps] = 0.3079499
[d.tol = 0.0001221, M = 30, h = 7.875e-07]
Log likelihood: -73.74 ==> AIC = 155.4705 [4 deg.freedom]
```

# Luku 3

## Moniulotteiset aikasarjat

Usein on järkevää tarkastella aikasarjoja niin, että ne että ne muodostavat yhdessä moniulotteisen prosessin. Tällöin voidaan ottaa huomioon havaintojen autokorrelaation lisäksi eri sarjojen havaintojen välinen korrelaatio, ns. ristikorrelaatio. Esim. haluttaessa muodostaa hyvin hajautettu sijoitussalkku, joka maksimoi tuotto-odotuksen ja minimoi varianssin, on välttämätöntä tarkastella arvopaperien tuottosarjoja yhdessä ottaen huomioon niiden välinen korrelaatio. Monet makrotaloudelliset muuttujat ovat sidoksissa toisiinsa tavalla, jota on mielekästä tutkia moniulotteisen aikasarja-analyysin keinoin.

Monet yksiulotteisen aikasarja-analyysin menetelmät ja mallit yleistyvät melko suoraviivaisesti moniulotteiseen tapaukseen. Kuitenkin uusia ongelmia ilmenee ja aivan uudentyypisiä riippuvuussuhteita on mielekästä määritellä. Seuraavassa kappaleessa yleistetään eräitä yksiulotteisen aikasarja-analyysin määritelmiä.

### 3.1 Heikko stationaarisuus ja ristikorrelaatiofunktio

Tarkastellaan  $m$  aikasarjaa  $\{X_{ti} \mid t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , missä  $EX_{ti}^2 < \infty$  kaikilla  $t$  ja  $i$ . Jos kaikki satunnaismuuttujien  $X_{tj}$  äärellisulotteiset jakaumat olisivat multinormaalaisia, kaikki aikasarjojen jakaumaominaisuudet voitaisiin palauttaa odotusarvoihin

$$\mu_{ti} = EX_{ti}$$

ja kovariansseihin

$$\gamma_{ij}(t+h, t) = \mathbb{E}[(X_{t+h,i} - \mu_{ti})(X_{tj} - \mu_{tj})].$$

Vaikka multinormaalisuus ei olisikaan voimassa, nämä toisen asteen ominaisuudet tarjoavat hyvän lähtökohdan aikasarjojen riippuvuuden analysoinnille.

Vektorimerkintää käyttäen moniulotteinen aikasarja voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} X_{t1} \\ \vdots \\ X_{tm} \end{bmatrix}, \quad t = 0, \pm 1, \dots$$

Moniulotteisen aikasarjan  $\{\mathbf{X}_t\}$  toisen asteen ominaisuudet määräytyvät odotusarvovektorien

$$\boldsymbol{\mu}_t = \mathbb{E}\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} \mu_{t1} \\ \vdots \\ \mu_{tm} \end{bmatrix}$$

ja kovarianssimatriisien

$$\Gamma(t+h, t) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(t+h, t) & \cdots & \gamma_{1m}(t+h, t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1}(t+h, t) & \cdots & \gamma_{mm}(t+h, t) \end{bmatrix}$$

avulla. Kovarianssimatriisit voidaan myös lyhyesti määritellä  $\Gamma(t+h, t) = \mathbb{E}[(\mathbf{X}_{t+h} - \boldsymbol{\mu}_{t+h})(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_t)']$ .

Vastaavasti kuin yksiulotteisessa tapauksessa voidaan määritellä, että  $\{\mathbf{X}_t\}$  on *(heikosti) stationaarinen*, jos  $\boldsymbol{\mu}(t)$  on riippumaton ajasta  $t$  ja  $\Gamma(t+h, t)$  on riippumaton ajasta  $t$  kaikilla viiveillä  $h$ . Stationaariselle aikasarjalle voimme käyttää lyhennettyjä merkintöjä

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix}$$

ja

$$\Gamma(h) = \mathbb{E}[(\mathbf{X}_{t+h} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})'] = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(h) & \cdots & \gamma_{1m}(h) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1}(h) & \cdots & \gamma_{mm}(h) \end{bmatrix}.$$

Huomaa, että matriisiin  $\Gamma(h)$  diagonaalilta saadaan yksiulotteisten prosessien  $\{X_{ti}\}$  autokovarianssifunktiot  $\gamma_{ii}(h)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Diagonaalin ulkopuolista elementtiä  $\gamma_{ij}(h)$ ,  $i \neq j$  kutsutaan sarjojen  $\{X_{ti}\}$  ja  $\{X_{tj}\}$  väliseksi *ristikovarianssifunktioksi*. Tässä on tärkeää huomata, että yleensä  $\gamma_{ij}(h)$  ei ole sama kuin  $\gamma_{ji}(h)$ . Korrelaatiomatriisifunktio määritellään

$$R(h) = \begin{bmatrix} \rho_{11}(h) & \cdots & \rho_{1m}(h) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m1}(h) & \cdots & \rho_{mm}(h) \end{bmatrix},$$

missä  $\rho_{ij}(h) = \gamma_{ij}(h)/[\gamma_{ii}(0)\gamma_{jj}(0)]^{1/2}$ . Funktio  $R(h)$  on kovarianssifunktio standardoidulle sarjalle, joka saadaan vähentämällä  $\boldsymbol{\mu}$  sarjasta  $\{\mathbf{X}_t\}$  ja jakamalla kukin komponenttisarja keskihajonnallaan.

Stationaarisen prosessin ristikovarianssifunktiolla on seuraava symmetriaominaisuus:  $\gamma_{ij}(h) = \gamma_{ji}(-h)$ . Tämä seuraa suoraan määritelmästä ja stationaarisuudesta:  $\gamma_{ij}(h) = \text{Cov}(X_{t+h,i}, X_{tj}) = \text{Cov}(X_{tj}, X_{t+h,i}) = \text{Cov}(X_{t-h,j}, X_{ti}) = \gamma_{ji}(-h)$ . Matriisimuodossa tämä yhteys on:  $\Gamma(h) = \Gamma'(-h)$ . Vastaava ominaisuus on tietysti myös voimassa ristikorrelaatiofunktiolla ja korrelaatiomatriisifunktiolla.

Ristikorrelaatiofunktioita  $\rho_{ij}(h)$  voidaan käyttää sarjojen  $i$  ja  $j$  välisen lineaarisen riippuvuuden tutkimiseen. Riippuvuus voi ilmetä mm. seuraavilla tavoilla:

- Sarjoilla  $\{X_{ti}\}$  ja  $\{X_{tj}\}$  on *samanaikasta riippuvuutta*, jos  $\rho_{ij}(0) \neq 0$ .
- Jos  $\rho_{ij}(h) = 0$  kaikilla  $h$ , sarjat ovat lineaarisesti riippumattomat (korreloimattomat).
- Jos  $\rho_{ij}(h) \neq 0$  jollakin  $h > 0$  mutta  $\rho_{ij}(h) = 0$  kaikilla  $h < 0$ , sarja  $\{X_{ti}\}$  *seuraa (lags)* sarjaa  $\{X_{tj}\}$ .
- Jos  $\rho_{ij}(h) \neq 0$  jollakin  $h < 0$  mutta  $\rho_{ij}(h) = 0$  kaikilla  $h > 0$ , sarja  $\{X_{ti}\}$  *johtaa (leads)* sarjaa  $\{X_{tj}\}$ .
- Jos  $\rho_{ij}(h) \neq 0$  jollakin  $h < 0$  ja jollakin  $h > 0$ , sarjojen välillä on *takaisinkytkentä (feedback relationship)*.

Stationaarisen, moniulotteisen aikasarjan odotusarvovektori voidaan esittää harhattomasti keskiarvovektorilla

$$\bar{\mathbf{X}}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t.$$



Kovarianssimatriisifunktio voidaan puolestaan estimoida kaavoilla

$$\hat{\Gamma}(h) = \begin{cases} n^{-1} \sum_{t=1}^{n-h} (\mathbf{X}_{t+h} - \bar{\mathbf{X}}_n)(\mathbf{X}_t - \bar{\mathbf{X}}_n)' & \text{kun } 0 \leq h \leq n-1, \\ \hat{\Gamma}'(-h) & \text{kun } -n+1 \leq h < 0. \end{cases}$$

Ristikorrelaatiokertoimen estimaatit ovat

$$\hat{\rho}_{ij}(h) = \hat{\gamma}_{ij}(h)(\hat{\gamma}_{ii}(0)\hat{\gamma}_{jj}(0))^{-1/2},$$

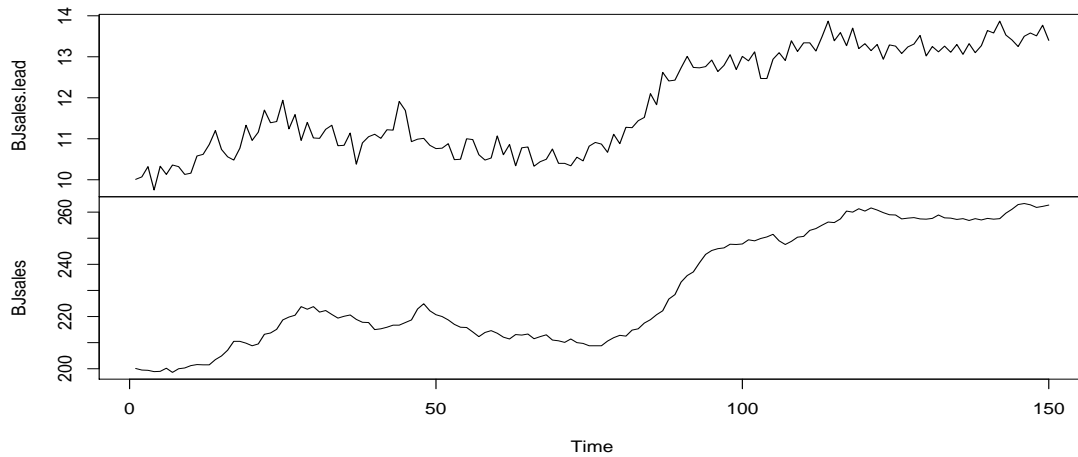
missä  $\hat{\gamma}_{ij}(h)$  tarkoittaa matriisin  $\hat{\Gamma}(h)$  rivin  $i$  sarakkeen  $j$  komponenttia.

Otosristikorrelaatiokertoimille  $\hat{\rho}_{ij}$  pätee seuraava asymptoottinen tulos: Jos sarjat  $\{X_{ti}\}$  ja ovat  $\{X_{tj}\}$  riippumattomat ja ainakin toinen sarjoista on iid-kohinaa, suurella otoskoolla likimain  $\hat{\rho}_{ij} \sim N(0, 1/n)$ . Tämän tuloksen perusteella ristikorrelaation merkitsevyyden tutkimisessa voidaan käyttää samoja rajoja kuin tutkittaessa, onko yksittäinen sarja valkoista kohinaa. Laajemmin asymptoottisia tuloksia on esitelty mm. Brockwellin ja Davisin kirjassa.

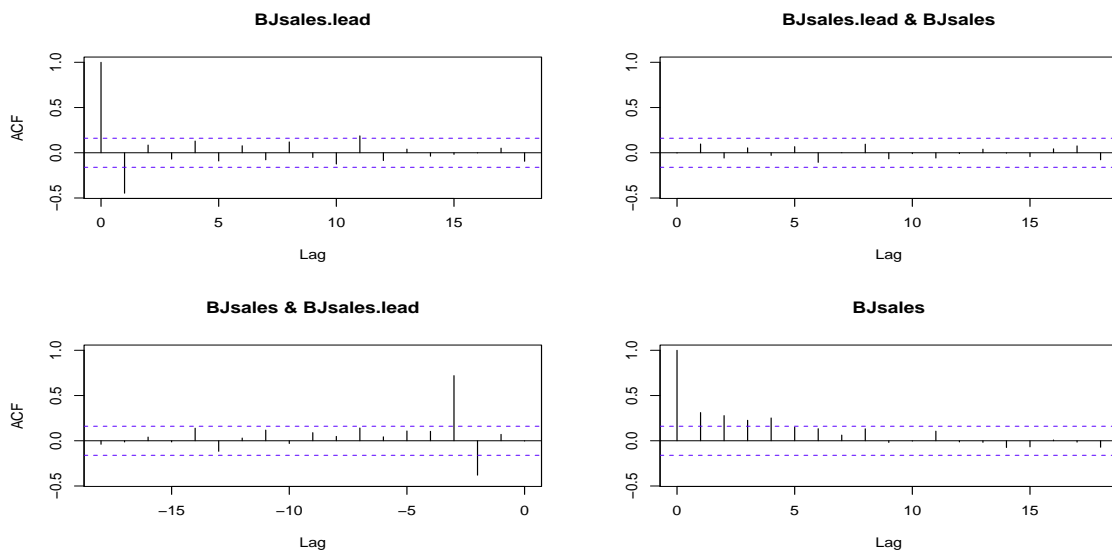
**Esim. 1** *Myyntiaineisto ja johtava indeksi.* Seuraava esimerkkiaineisto esiintyy Boxin ja Jenkinsin kirjassa (1976) Time Series Analysis, Forecasting and Control, Holden-Day, San Francisco, p. 537. Kuten kuvioista 3.1 nähdään, sarjat `BJsales.lead` ja `BJsales` eivät ole stationaarisia. Voidaksemme tutkia niiden riippuvuutta ristikorrelaatiofunktion avulla, tarkastelemme differoituja sarjoja  $\{D_{t1}\}$  ja  $\{D_{t2}\}$ .

Kuviossa 3.2 näemme sarjojen autokorrelaatiofunktioita ja ristikorrelaatiofunktion. Ristikorrelaatiofunktion perusteella näyttäisi siltä, että sarjoilla ei ole samanaikaista korrelaatiota mutta `BJsales.lead` ennakoii (johtaa) sarjaa `BJsales` viiveillä 2 ja 3, sillä  $\hat{\rho}_{12}(h) \neq 0$ , kun  $h = -2$  tai  $-3$ . Tulkinnoissa on kuitenkin syytä olla varovainen, sillä kummatkin sarjat ovat autokorreloituneita. Parempi olisi ensin mallintaa differoitujen sarjojen autokorrelaatorakenne ARMA-mallilla ja tarkastella jäännössarjojen ristikorrelaatiofunktioita.

```
X <- cbind(BJsales.lead, BJsales)
plot(X, main="")
D <- diff(X)
acf(D)
```



Kuvio 3.1: BJsales.lead ja BJsales



Kuvio 3.2: Sarjojen BJsales.lead ja BJsales differenssarjojen autokorrelaatiofunktio ja ristikorrelaatiofunktio

## 3.2 Valkoinen kohina ja lineaarinen prosessi

Analogisesti yksiulotteisten prosessien kanssa määrittelemme, että  $m$ -ulotteinen aikasarja  $\{\mathbf{Z}_t\}$  on *valkoista kohinaa odotusarvolla  $\mathbf{0}$  ja kovarianssimatriisilla  $\Sigma$* , merk.  $\{\mathbf{Z}_t\} \sim \text{WN}(\mathbf{0}, \Sigma)$ , jos  $\{\mathbf{Z}_t\}$  on stationaarinen odotusarvolla  $\mathbf{0}$  ja kovarianssifunktiolla

$$\Gamma(h) = \begin{cases} \Sigma, & \text{kun } h = 0, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Sarja  $\{\mathbf{Z}_t\}$  on *riippumatonta kohinaa odotusarvolla  $\mathbf{0}$  ja kovarianssimatriisilla  $\Sigma$* , merk.  $\{\mathbf{Z}_t\} \sim \text{IID}(\mathbf{0}, \Sigma)$ , jos satunnaisvektorit  $\{\mathbf{Z}_t\}$  ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita odotusarvolla  $\mathbf{0}$  ja kovarianssimatriisilla  $\Sigma$ .

Prosessin 'valkoisuutta' voidaan tutkia auto- ja ristikorrelaatiofunktioiden lisäksi portmanteau-testeillä. Yksiulotteiselle Ljung-Box-testille ovat kehittäneet yleistyksiä moniulotteiseen tapaukseen mm. Hoskin (1980,1981) ja Li&McLeod (1981). Testien nollahypoteesi on  $R(1) = R(2) = \dots = R(h) = 0$  ja vaihtoehtoinen hypoteesi  $R(i) \neq 0$  jollain  $i = 1, \dots, h$ . Hoskinin testisuure on muotoa

$$Q_m(h) = n^2 \sum_{j=1}^h \frac{1}{n-j} \text{tr}[\hat{\Gamma}(j)' \hat{\Gamma}(0)^{-1} \hat{\Gamma}(j) \hat{\Gamma}(0)^{-1}],$$

missä  $n$  on havaintojen lkm ja  $m$  aikasarjan dimensio. Nollahypoteesin ja tiettyjen säännöllisyyssehtojen vallitessa  $Q_m(h)$  noudattaa suurella otoskoolla likimain  $\chi^2$ -jakaumaa  $m^2 h$  vapausasteella.

Aikasarja  $\{\mathbf{X}_t\}$  on *lineaarinen prosessi*, jos se voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{X}_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j \mathbf{Z}_{t-j}, \quad \{\mathbf{Z}_t\} \sim \text{WN}(\mathbf{0}, \Sigma),$$

missä  $\{C_j\}$  on jono  $m \times m$ -matriiseja, joiden komponentit ovat itseisesti summautuvia. Tällöin voidaan osoittaa (harjoitustehtävä), että prosessi on stationaarinen odotusarvolla  $\mathbf{0}$  ja kovarianssifunktiolla

$$\Gamma(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{j+h} \Sigma C_j'.$$

### 3.3 Vektori-autoregressiiviset (VAR) mallit

Moniulotteiselle prosessille voidaan määritellä ARMA-malli (ks. Brockwell&Davis tai Tsay). Rajoitumme kuitenkin seuraavassa tarkastelemaan vektoriarvoista AR(p)-mallia, jota kuvaa yhtälö

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \Phi_1 \mathbf{X}_{t-1} + \dots + \Phi_p \mathbf{X}_{t-p} + \mathbf{Z}_t, \quad \mathbf{Z}_t \sim \text{WN}(\mathbf{0}, \Sigma). \quad (3.1)$$

Käyttäen viiveoperaattoria  $\mathbf{B}$  tämä voidaan esittää edelleen muodossa

$$(I - \Phi_1 \mathbf{B} - \dots - \Phi_p \mathbf{B}) \mathbf{X}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \mathbf{Z}_t,$$

missä  $I$  on identiteettimatriisi, tai vielä lyhyemmin

$$\Phi(\mathbf{B}) \mathbf{X}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \mathbf{Z}_t,$$

missä  $\Phi(z) = I - \Phi_1 z - \dots - \Phi_p z^p$  on matriisi-arvoinen polynomi.

Kun oletetaan prosessin  $\{\mathbf{X}_t\}$  stationaarisuus, ottamalla yhtälöstä (3.1) puolittain odotusarvo voidaan ratkaista odotusarvovektori

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E}(\mathbf{X}_t) = (I - \Phi_1 - \dots - \Phi_p)^{-1} \boldsymbol{\phi}_0 = [\Phi(1)]^{-1} \boldsymbol{\phi}_0.$$

Prosessi (3.1) on *kausaalinen*, jos se voidaan esittää MA( $\infty$ )-prosessina

$$\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \mathbf{Z}_{t-j} \quad \text{kaikilla } t,$$

missä  $\{\Psi_j\}$  on jono matriiseja itseisesti summautuvilla komponenteilla. Tämän kanssa yhtäpitävää on (ks. todistus TSTM), että determinantilla  $\det \Phi(z)$  ei ole nollakohtia kompleksitason yksikkökierokossa  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ .

Kertoimet  $\Psi_j$  voidaan ratkaista rekursiivisesti yhtälöistä

$$\Psi_j = \sum_{k=1}^{\min(p,j)} \Phi_k \Psi_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

missä  $\Psi_0 = I$  ja  $\Psi_j = 0$ , kun  $j < 0$ . Esim. VAR(1)-prosessin tapauksessa

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= I, \\ \Psi_1 &= \Phi_1 \Psi_0 = \Phi_1, \\ \Psi_2 &= \Phi_1 \Psi_1 = \Phi_1^2, \\ &\vdots \\ \Psi_j &= \Phi_1 \Psi_{j-1} = \Phi_1^j, \quad j \geq 3. \end{aligned}$$

Keskineliövirheen mielessä paras yhden askelen ennuste VAR(p)-prosessille on

$$\mathbf{P}_n \mathbf{X}_{n+1} = \phi_0 + \Phi_1 \mathbf{X}_n + \dots + \Phi_p \mathbf{X}_{n-p+1},$$

kun  $n \geq p$ . Ennustevirhe on  $\mathbf{Z}_{n+1}$ , jonka kovarianssimatriisi on  $\Sigma$ . Useamman askelen ennusteet saadaan rekursiivisesti kaavasta

$$\mathbf{P}_n \mathbf{X}_{n+h} = \phi_0 + \Phi_1 \mathbf{P}_n \mathbf{X}_{n+h-1} + \dots + \Phi_p \mathbf{P}_n \mathbf{X}_{n+h-p},$$

missä  $\mathbf{P}_n \mathbf{X}_{n+h-j} = \mathbf{X}_{n+h-j}$ , kun  $j \geq h$ . Ennustevirhe  $h$  askelen ennusteessa on

$$\mathbf{X}_{n+h} - \mathbf{P}_n \mathbf{X}_{n+h} = \sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j \mathbf{Z}_{n+h-j},$$

jonka kovarianssimatriisi on  $\sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j \Sigma \Psi_j'$ .

VAR-mallin estimointi voidaan tehdä suurimman uskottavuuden menetelmällä, mutta se on moniulotteisessa tapauksessa numeerisesti huomattavasti vaativampi kuin yksiulotteisessa tapauksessa. Yksityiskohtia on esitetty Brocwellin ja Davisin kirjassa. Joka tapauksessa on syytä käyttää alkuarvoina alustavilla estimointimenetelmillä saatavia estimaatteja. Alustavina menetelminä voidaan käyttää joko moniulotteista yleistystä Yule-Walker-menetelmästä tai ehdollista uskottavuusmenetelmää, jossa uskottavuusfunktio lasketaan ehdollisena ensimmäisten havaintovektorien  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p$  suhteen. Tämä ehdollinen uskottavuusmenetelmä on yhtäpitävä OLS-menetelmän kanssa, kun käytetään normaalista uskottavuusfunktioita.

Ehdollinen uskottavuusfunktio on muotoa

$$L(\phi, \Phi, \Sigma) = (2\pi)^{(n-p)m/2} (\det \Sigma)^{-(n-p)/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^n (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t) \right],$$

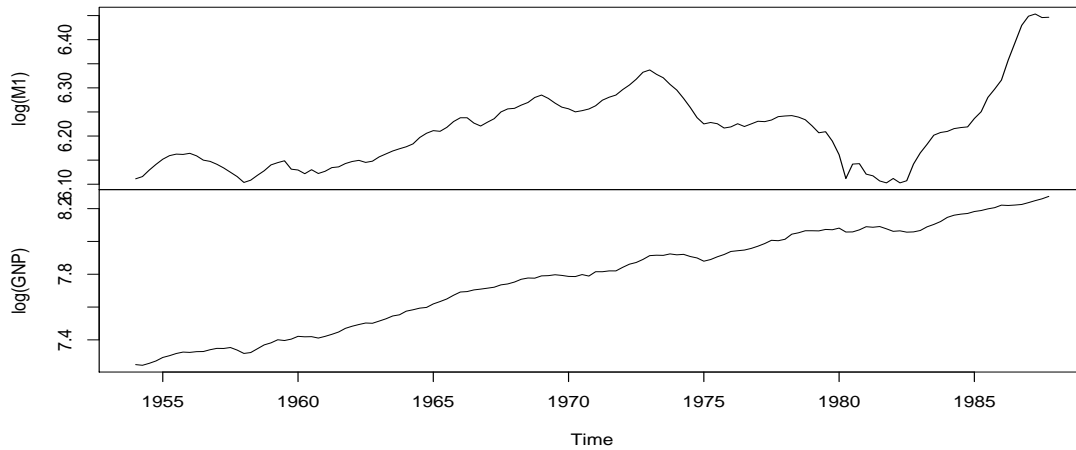
missä  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_p)$  ja  $\hat{\mathbf{x}}_t = \phi_0 + \sum_{j=1}^p \Phi_j \mathbf{x}_{t-j}$  ovat yhden askelen ennusteita. Estimoinnissa voidaan hyödyntää regressioyhtälöä

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}'_{p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}'_p & \mathbf{x}'_{p-1} & \cdots & \mathbf{x}'_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{x}'_{n-1} & \mathbf{x}'_{n-2} & \cdots & \mathbf{x}'_{n-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi'_0 \\ \Phi'_1 \\ \Phi'_2 \\ \vdots \\ \Phi'_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{z}'_{p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{z}'_n \end{bmatrix}$$

tai lyhyesti  $X = UB + Z$ , josta saadaan OLS-estimaattori  $\hat{B} = (U'U)^{-1}U'X$ . Suurimman uskottavuuden estimaattori  $\Sigma$ :lle on  $\hat{\Sigma} = \frac{1}{n-p}\hat{Z}'\hat{Z}$ , missä  $\hat{Z} = X - U\hat{B}$ . Harhaton estimaattori on puolestaan  $S = \frac{1}{n-2p-1}\hat{Z}'\hat{Z}$

Sopivan viivepituuden valinnassa voidaan käyttää informaatiokriteereitä AIC, AICC ja BIC. Jos käytetään ehdollista uskottavuusfunktiota, on syytä tehdä korjaus selittävien havaintojen määrän  $n - p$  suhteen, jotta tulokset olisivat vertailukelpoisia.

**Esim. 2** *USEconomic-sarja*. Pakettiin *tseries* sisältyvässä aineistossa *USEconomic* on 4-ulotteinen aikasarja, joka sisältää USA:n taloutta kuvaavia muuttujia vuosilta 1954—1987. Rajoitumme tässä tarkastelemaan muuttujien  $\log(M1)$  ja  $\log(GNP)$  muodostamaa kaksiulotteista aikasarjaa. Kuten kuviossa 3.3 havaitaan, aikasarjat ovat epästationaarisia. Tarkastelemme jatkossa differoitujen aikasarjojen muodostamaa kaksiulotteista aikasarjaa.



Kuvio 3.3: USEconomic-aineiston aikasarjoja

R:n funktio  $ar$  määrittää parhaaksi viivepituudeksi 1. Malli siis voidaan esittää muodossa  $\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\Phi}\mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{Z}_t$  tai

$$\begin{aligned} Y_{t1} &= \phi_1 + \phi_{11}Y_{t-1,1} + \phi_{12}Y_{t-1,2} + Z_{t1}, \\ Y_{t2} &= \phi_2 + \phi_{21}Y_{t-1,1} + \phi_{22}Y_{t-1,2} + Z_{t2}. \end{aligned}$$

Jotta voisimme vielä helpommin tutkia kerronten merkitsevyyttä, estimoimme mallin myös OLS-menetelmällä. Tulosten perusteella näyttää siltä, että kerroin  $\phi_{12}$  ei ole merkisevä. Sarjan  $\{Y_{t1}\}$  ( $\nabla\log(M1)$ ) aikaisempi havainto siis ennakoi sarjan  $\{Y_{t2}\}$  ( $\nabla\log(GNP)$ ) nykyistä havaintoa muttei päinvastoin. Tällaisessa tilanteessa puhutaan *Granger-kausaalisuudesta*. Toisin sanoen M1 Granger-vaikuttaa (Granger-causes) muuttujaan GNP muttei päinvastoin. Asia voidaan myös ilmaista sanomalla, että muuttuja M1 on *eksogeeninen* muuttujan GNP suhteen. Saman päätelmän voisi tehdä tutkimalla ristikorrelaatiofunktioita.

```
library(tseries)
X <- USEconomic[,1:2]
Y <- diff(X)
#Yule-Walker solution
(a <- ar(Y))
$ar
, , 1
      log(M1) log(GNP)
log(M1)  0.6046 -0.1413
log(GNP)  0.2647  0.1887

#OLS-solution
n <- dim(Y)[1]
summary(lm(Y[-1,]~Y[-n,]))

Response log(M1) :

Coefficients:
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    0.002032   0.001112   1.827   0.070 .
Y[-n, ]log(M1)  0.605185   0.075740   7.990 6.09e-13 ***
Y[-n, ]log(GNP) -0.142638   0.093215  -1.530   0.128
---

Response log(GNP) :

Coefficients:
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    0.0055944  0.0009962   5.616 1.12e-07 ***
Y[-n, ]log(M1)  0.2644613  0.0678459   3.898 0.000154 ***
Y[-n, ]log(GNP) 0.1893458  0.0834998   2.268 0.024990 *
```

Voimme testata mallin riittävyyden Hoskinin testin avulla.

```
library(portes)
Hosking(a)
Lags Statistic df p-value
  5  18.84034  16 0.2770294
 10  35.33721  36 0.4999223
 15  50.23717  56 0.6917513
 20  70.91884  76 0.6432960
 25  89.18418  96 0.6756652
 30 104.08878 116 0.7782603
```

Lopuksi voimme tulostaa alkuperäisen sarjan ja viiden vuoden ennusteen seuraavasti:

```
pr <- predict(a,n.ahead=20)
library(zoo)
Y2 <- rbind.zoo(Y,pr$pred)
init <- ts(rbind(X[1,]),start=start(X),frequency=frequency(X))
X2 <- cumsum(rbind.zoo(init,Y2))
plot(X2)
```

### 3.4 Yksikköjuuri-epästationaarisuus ja yhteisintegroituneisuus

Olemme nähneet, että epästationaarisen yksiulotteisen aikasarjan voi usein muuntaa stationaariseksi soveltamalla siihen differenssioperaattoria  $\nabla = 1 - B$  yhden tai useamman kerran. Jos  $\{\nabla^d X_t\}$  on stationaarinen jollain positiivisella kokonaisluvulla  $d$  mutta  $\{\nabla^{d-1} X_t\}$  on epästationaarinen, sanomme, että sarjan  $\{X_t\}$  *integroitumisaste on  $d$*  (integrated of order  $d$ ), merk.  $\{X_t\} \sim I(d)$ . Määrittelemme differenssioperaattorin  $m$ -ulotteiselle aikasarjalle  $\{\mathbf{X}_t\}$  niin, että jokainen sarjan komponentti differoidaan:  $\nabla \mathbf{X}_t = (\nabla X_{t1}, \dots, \nabla X_{tm})'$ .

Moniulotteisessa tapauksessa voimme määritellä integroitumisasteen samalla tavalla. Sanomme, että  $\{\mathbf{X}_t\} \sim I(d)$ , jos  $\{\nabla^d \mathbf{X}_t\}$  on stationaarinen, mutta  $\{\nabla^{d-1} \mathbf{X}_t\}$  ei. Kuitenkin moniulotteisessa tapauksessa integroitumisasteilla on eräänlaisia välimuotoja. Sanomme, että  $I(d)$ -prosessi  $\{\mathbf{X}_t\}$  on yhteis-



sintegroitunut yhteisintegroitusvektorilla  $\beta$ , jos  $\beta$  on sellainen  $m$ -vektori, että prosessin  $\{\beta'X_t\}$  integroitusaste on pienempi kuin  $d$ .

### 3.5 Yhteisintegroituneet VAR-mallit

Tarkastellaan seuraavassa VAR-prosessia, joka saattaa sisältää aikatrendin:

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\delta}_t + \Phi_1 \mathbf{X}_{t-1} + \dots + \Phi_p \mathbf{X}_{t-p} + \mathbf{Z}_t, \quad (3.2)$$

missä  $\mathbf{Z}_t \sim \text{WN}(\mathbf{0}, \Sigma)$  ja  $\boldsymbol{\delta}_t = \boldsymbol{\delta}_0 + \boldsymbol{\delta}_1 t$ . Tässä AR-polynomi on  $\Phi(z) = I - \Phi_1 z - \dots - \Phi_p z^p$ . Jos determinantin  $|\Phi(z)|$  nollakohdat ovat yksikköympyrän ulkopuolella, prosessi on (trendi)stationaarinen ja kausaalinen. Jos  $|\Phi(1)| = 0$ , prosessi on yksikköjuuri-epästationaarinen. Oletamme seuraavassa tarkastelussa yksinkertaisuuden vuoksi, että prosessin  $\{\mathbf{X}_t\}$  integroitusaste on 0 tai 1.

Malli (3.2) voidaan esittää ns. *virheenkorjausmallina* (error correction model, ECM) seuraavasti:

$$\nabla \mathbf{X}_t = \boldsymbol{\delta}_t + \Pi \mathbf{X}_{t-1} + \Phi_1^* \nabla \mathbf{X}_{t-1} + \dots + \Phi_{p-1}^* \nabla \mathbf{X}_{t-p+1} + \mathbf{Z}_t, \quad (3.3)$$

missä

$$\Phi_j^* = - \sum_{i=j+1}^p \Phi_i, \quad j = 1, \dots, p-1,$$

$$\Pi = -\Phi(1) = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_p - I.$$

Koska  $\{\mathbf{X}_t\}$  on enintään I(1)-prosessi,  $\{\nabla \mathbf{X}_t\}$  on I(0)-prosessi.

Voimme erottaa eri tapauksia sen mukaan, mikä matriisin  $\Pi$  aste on. Yleisesti, jos aste on  $r$ , on olemassa hajotelma  $\Pi = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ , missä  $\boldsymbol{\alpha}$  ja  $\boldsymbol{\beta}$  ovat täysiasteisia  $m \times r$ -matriiseja.

1. Jos  $\text{rank}(\Pi) = 0$ , niin  $\Pi = 0$  ja  $\{X_t\}$  ei ole yhteisintegroitunut. Yhtälön (3.3) ECM yksinkertaistuu muotoon

$$\nabla \mathbf{X}_t = \boldsymbol{\delta}_t + \Phi_1^* \nabla \mathbf{X}_{t-1} + \dots + \Phi_{p-1}^* \nabla \mathbf{X}_{t-p+1} + \mathbf{Z}_t,$$

joten  $\{\nabla X_t\}$  noudattaa VAR( $p-1$ )-prosessia deterministisellä trendillä.

2. Jos  $\text{rank}(\Pi) = m$ , niin  $|\Phi(1)| \neq 0$  eikä AR-polynomin determinantilla ole yksikkö-juuria. Siis  $\{\mathbf{X}_t\} \sim I(0)$ . Tällöin ECM-mallista ei ole hyötyä ja voidaan tutkia suoraan AR(p)-mallia (3.2).
3. Kun  $0 < \text{rank}(\Pi) = r < m$ , niin  $\{\mathbf{X}_t\}$  on yhteisintegroitunut  $r$  yhteisintegroitusvektorilla; yhteisintegroituvat relaatiot ovat  $\mathbf{W}_t = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_t$ .

Sen mukaan, miten deterministinen termi  $\boldsymbol{\delta}_t = \boldsymbol{\delta}_0 + \boldsymbol{\delta}_1 t$  määritellään, voidaan erotella seuraavat trendityypit:

1. Jos  $\boldsymbol{\delta}_t = \mathbf{0}$ , kaikki komponentit  $\{X_{ti}\}$  ovat I(1)-prosesseja ilman trendiä ja stationaarisen sarjan  $\mathbf{W}_t = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_t$  odotusarvo on  $\mathbf{0}$ .
2. Jos  $\boldsymbol{\delta}_t = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{c}_0$ , missä  $\mathbf{c}_0$  on  $r$ -ulotteinen, nollasta poikkeava vakiovektori, ECM-malli tulee muotoon

$$\nabla\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{c}_0) + \Phi_1^*\nabla\mathbf{X}_{t-1} + \dots + \Phi_{p-1}^*\nabla\mathbf{X}_{t-p+1} + \mathbf{Z}_t,$$

jolloin komponentit  $\{X_{ti}\}$  ovat I(1)-prosesseja ilman trendiä mutta sarjan  $\{\mathbf{W}_t\}$  odotusarvo on  $-\mathbf{c}_0$ .

3. Jos  $\boldsymbol{\delta}_t$  on vakiovektori, se voidaan esittää muodossa  $\boldsymbol{\delta}_0 = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{c}_0 + \boldsymbol{\alpha}_\perp\mathbf{d}_0$ , missä  $\boldsymbol{\alpha}_\perp$  on sellainen  $m \times (m - r)$ -matriisi, että  $\boldsymbol{\alpha}'_\perp\boldsymbol{\alpha} = 0$ . Tällöin ECM voidaan esittää

$$\nabla\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\alpha}_\perp\mathbf{d}_0 + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{c}_0) + \Phi_1^*\nabla\mathbf{X}_{t-1} + \dots + \Phi_{p-1}^*\nabla\mathbf{X}_{t-p+1} + \mathbf{Z}_t,$$

joten komponenttisarjoilla  $\{X_{ti}\}$  on lineaarinen trendi ja sarjalla  $\{\mathbf{W}_t\}$  odotusarvo  $-\mathbf{c}_0$ .

4. Jos  $\boldsymbol{\delta}_t = \boldsymbol{\delta}_0 + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{c}_1 t$ , ECM on muotoa

$$\nabla\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\alpha}_\perp\mathbf{d}_0 + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t) + \Phi_1^*\nabla\mathbf{X}_{t-1} + \dots + \Phi_{p-1}^*\nabla\mathbf{X}_{t-p+1} + \mathbf{Z}_t,$$

joten komponenttisarjoilla  $\{X_{ti}\}$  on lineaarinen trendi ja komponenttisarjat  $\{W_{ti}\}$  ovat trendistationaarisia.

5. Jos  $\boldsymbol{\delta}_t = \boldsymbol{\delta}_0 + \boldsymbol{\delta}_1 t$ , komponenteilla  $\{X_{ti}\}$  on neliöllinen trendi ja komponentit  $\{W_{ti}\}$  ovat trendistationaarisia.

ECM-malli voidaan estimoida suurimman uskottavuuden menetelmällä. Menetelmä on kuitenkin jossain määrin monimutkainen eikä sitä esitellä tässä (ks. Tsay tai Hamilton: Time Series Analysis tai Søren Johansen: Likelihood-based inference in cointegrated vector auto-regressive models).

Søren Johansen (1988) on esittänyt seuraavat testityypit yhteisintegroituneiden relaatioiden määrän testaamiseksi.

- trace-testi:  $H_0 : \text{rank}(\Pi) = r$  vs.  $H_a : \text{rank}(\Pi) > r$
- suurimman ominaisarvon testi (maximum eigenvalue test):  
 $H_0 : \text{rank}(\Pi) = r$  vs.  $H_a : \text{rank}(\Pi) = r + 1$

Ks. testisuureiden lausekkeet esim. Tsayn kirjasta. Kummassakin tapauksessa kyseessä on uskottavuussuhdetesti. Testisuureet eivät kuitenkaan noudata nollahypoteesin tapauksessa asympotoottisesti tavanomaisia  $\chi^2$ -jakaumia. Sen sijaan jakaumien kriittisiä arvoja on taulukoitu simulointien perusteella.

**Esim. 4.** *Myyntiaineisto ja johtava indeksi (jatkoa).* Kuvion 3.1 perusteella voisi päätellä, että sarjojen `BJsales` ja `BJsales.lead` välillä voisi vallita likimainainen lineaarinen riippuvuus. Testaamme seuraavaksi yhteisintegroituvan relaation olemassaoloa käyttäen R-pakettiin `urca` sisältyvää funktiota `ca.jo`. Esimerkin testityyppinä on 'eigen' eli suurimman ominaisarvon testi. Mallin deterministisen osan määrittely on 'const', joka vastaa tapausta  $\delta_t = \alpha \mathbf{c}_0$ . (Määrittely 'trend' vastaa tapausta  $\delta_t = \delta_0 + \alpha \mathbf{c}_1 t$ . Tapauksessa 'none' ilmeisesti R-koodissa on väärä taulukko). Määrittely  $K = 3$  tarkoittaa sitä, että mallin AR-muodon (3.2) asteeksi valitaan on 3. Määrittely `spec='transitory'` vastaa ECM-mallin määrittelyä (3.3).

Testien perusteella hypoteesi  $r = 0$  hylätään mutta ei hypoteesia  $r = 1$ . Tämä tarkoittaa sitä, että prosessilla on yksi yhteisintegroituva vektori. Jos myös hypoteesi  $r = 1$  hylättäisiin, tämä tarkoittaisi sitä, että sarja olisi stationaarinen, mikä ei vaikuta kovin uskottavalta kuvion 3.1 perusteella. Estimointitulosten perusteella  $\hat{\alpha} = (-0.0546, 4.72)'$  ja  $\hat{\beta} = (1, -0.0550)'$ . Yhteisintegroituva relaatio on muotoa  $BJsales.lead = 0.055 \cdot BJsales - 0.951 + \tilde{W}_t$ , missä  $\{\tilde{W}_t\}$  on 0-keskinen stationaarinen prosessi.

Tulokseen on kuitenkin syytä suhtautua varauksella, sillä `BJsales`-sarjan jäännössarjassa esiintyy autokorrelaatiota (kuvio 3.4). Testit perustuvat oletukseen jäännösten riippumattomuudesta. Jos AR-muodon viivepituudeksi asetetaan  $K = 8$ , jäännösten autokorreloituneisuus häviää. Samalla kuitenkin testin  $H_0 : \text{rank}(\Pi) = 0$  tulos muuttuu ei-merkitseväksi eikä yhteisintegroituvan relaation olemassaoloa voida osoittaa.

```
library(urca)
X <- cbind(BJsales.lead, BJsales)
a <- ca.jo(X, type="eigen", ecdet="const", K=3, spec="transitory")
```

```

summary(a); resplot(a)

#####
# Johansen-Procedure #
#####

Test type: maximal eigenvalue statistic (lambda max) , without linear
trend and constant in cointegration

Eigenvalues (lambda):
[1] 9.468938e-01 1.911559e-02 6.002439e-17

Values of teststatistic and critical values of test:

          test 10pct  5pct  1pct
r <= 1 |   2.84  7.52  9.24 12.97
r = 0  | 431.51 13.75 15.67 20.20

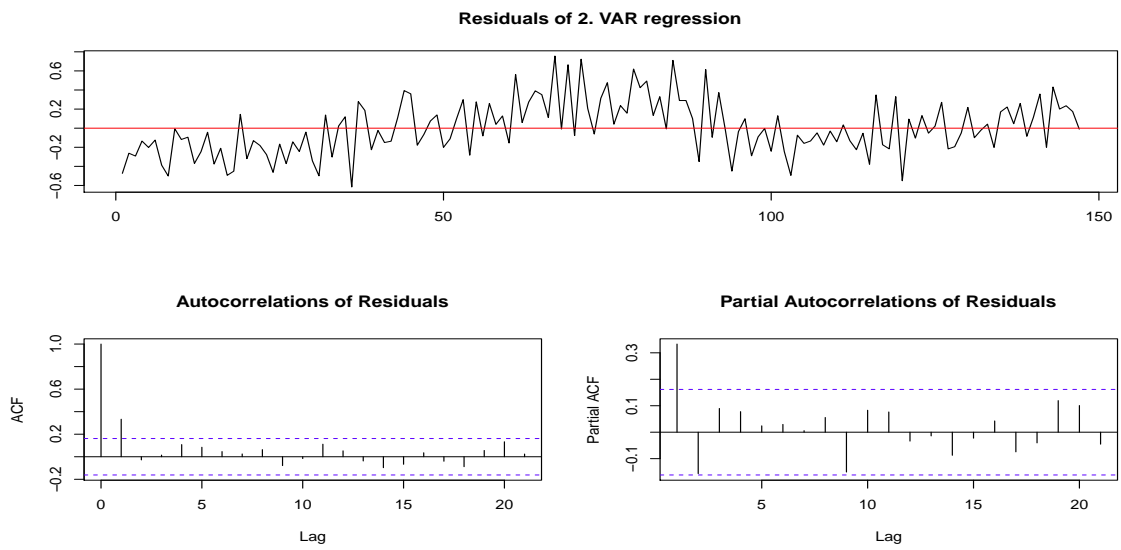
Eigenvectors, normalised to first column:
(These are the cointegration relations)

          BJsales.lead.l1  BJsales.l1  constant
BJsales.lead.l1      1.00000000  1.00000000  1.00000000
BJsales.l1           -0.05504036 -0.02891266 -0.2672937
constant             0.95111756 -5.99894266 46.6758372

Weights W:
(This is the loading matrix)

          BJsales.lead.l1  BJsales.l1  constant
BJsales.lead.d      -0.05458765 -0.038047745 -3.641671e-17
BJsales.d           4.71969207 -0.001594596  4.322637e-15

```



Kuvio 3.4: BJsales-sarjan jäännössarja ECM-mallin sovittamisen jälkeen

# Luku 4

## Moniulotteiset volatilitteettimallit

Tässä luvussa yleistetään luvun 1 volatilitteettimalleja moniulotteiseen tapaukseen. Mallinnuksen kohteena on moniulotteisen tuottosarjan ehdollinen kovarianssimatriisi  $\Sigma_t = \text{Cov}(\mathbf{X}_t | \mathcal{F}_{t-1})$ . Moniulotteinen lähestymistapa mahdollistaa usean riskillisen sijoituskohteen muodostaman sijoitussalkun painojen optimoinnin ja riskilukujen (esim. Value at Risk) laskemisen.

Seuraavassa oletetaan, että moniulotteisessa aikasarjassa mahdollisesti esiintyvät lineaariset riippuvuudet on mallinnettu. Tarkastelun kohteena on tällöin aikasarja  $\{\mathbf{x}_t, t = 1, \dots, n\}$ , jonka oletetaan olevan otos moniulotteisesta valkoisen kohinan prosessista  $\{\mathbf{X}_t\} \sim \text{WN}(\mathbf{0}, \Sigma)$ . Jos tuottosarja itsessään ei toteuta tätä oletusta, tarkastellaan lineaarisen mallinnuksen tuloksena saatavaa jäännössarjaa.

### 4.1 Eksponentiaalisesti painotettu keskiarvo

(Ei-ehdollisen) kovarianssimatriisin estimaattori on

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i'$$

Yksinkertainen estimaattori ehdolliselle kovarianssimatriisille saadaan eksponentiaalisella tasoituksella (EWMA, exponentially weighted moving average):

$$\hat{\Sigma}_t = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^{t-1}} \sum_{j=1}^{t-1} \lambda^{j-1} \mathbf{X}_{t-j} \mathbf{X}_{t-j}'$$

missä  $0 < \lambda < 1$ . Kun  $t$  on riittävän suuri, likimain

$$\hat{\Sigma}_t = (1 - \lambda)\mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1} + \lambda\hat{\Sigma}_{t-1}. \quad (4.1)$$

Tämän yhtälön avulla voidaan  $\hat{\Sigma}_t$  laskea rekursiivisesti, kun asetetaan  $\lambda$  ja alkuarvoestimaatti  $\hat{\Sigma}_0$ .

Olettamalla, että prosessi  $\{\mathbf{X}_t\}$  on gaussinen, voidaan  $\lambda$  myös estimoida maksimoimalla log-uskottavuusfunktio

$$\ln L(\lambda) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n [\ln(|\Sigma_t|) + \mathbf{x}'_t \Sigma_t^{-1} \mathbf{x}_t] + \text{vakio}.$$

Matriisi  $\Sigma_t$  voidaan laskea rekursiivisesti kaavan 4.1 mukaisesti korvaamalla se matriisilla  $\hat{\Sigma}_t$ .

EWMA-menetelmän etuna voidaan pitää, että se on laskennallisesti yksinkertainen ja tuloksena saatava ehdollinen kovarianssimatriisi  $\hat{\Sigma}_t$  on positiivisesti definiitti kunhan vain  $\hat{\Sigma}_0$  on sellainen. Menetelmää voidaan pitää vertailukohtana monimutkaisemmille malleille. On kuitenkin huomattava, että menetelmässä prosessia  $\{\Sigma_t\}$  ei oleteta stationaariseksi; kyseessä on eräänlainen IGARCH(1,1)-prosessin yleistys.

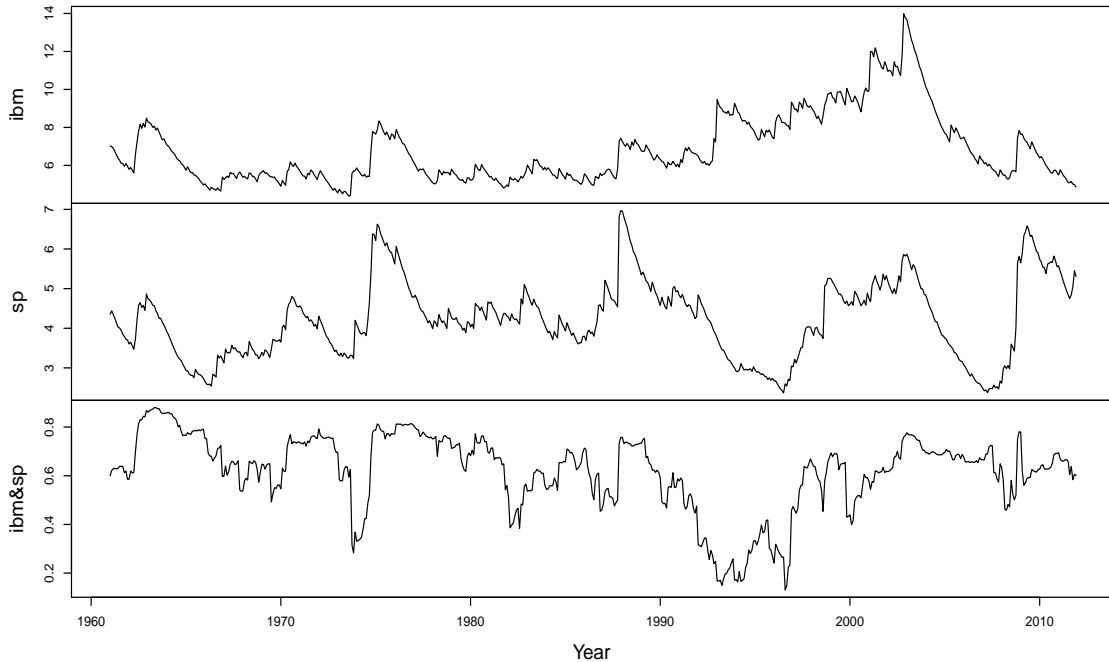
R:n MTS-paketissa on funktioita muutamien moniulotteisten volatilitiitimallien estimoimiseksi. Seuraavan koodin avulla on tehty EWMA-tasointus IBM-yhtiön ja SP500-indeksin kuukausituottosarjoille. Kuvio 4.1 havainnollistaa lopputulosta.

```
library("MTS")
data("mts-examples",package="MTS")
data <- ts(ibmspko[,2:3],start=1961,frequency=12)
mod1 <- EWMAvol(data, lambda=-4)
cor12 <- mod1$Sigma.t[,2]/sqrt(mod1$Sigma.t[,1]*mod1$Sigma.t[,4])
volcor <- ts(cbind(100*sqrt(mod1$Sigma.t[,c(1,4)]),cor12),start=1961,frequency=12)
colnames(volcor)<- c("ibm","sp","ibm&sp")
plot(volcor,main="",xlab="Year")
```

## 4.2 BEKK-malli

Yksi GARCH-mallin yleistyksistä, joka takaa ehdollisen kovarianssimatriisin positiivisesti definiittisyyden ja mahdollistaa dynaamiset riippuvuudet





Kuvio 4.1: IBM-yhtiön ja SP500-indeksin kuukausittaisten osaketuottosarjojen volatiliiteetit prosentteina ja korrelaatio EWMA-menetelmällä estimoituina.

komponenttisarjojen välillä, on ns. BEKK-malli (Baba-Engle-Kraft-Kroner-malli). Sitä kuvaa yhtälö

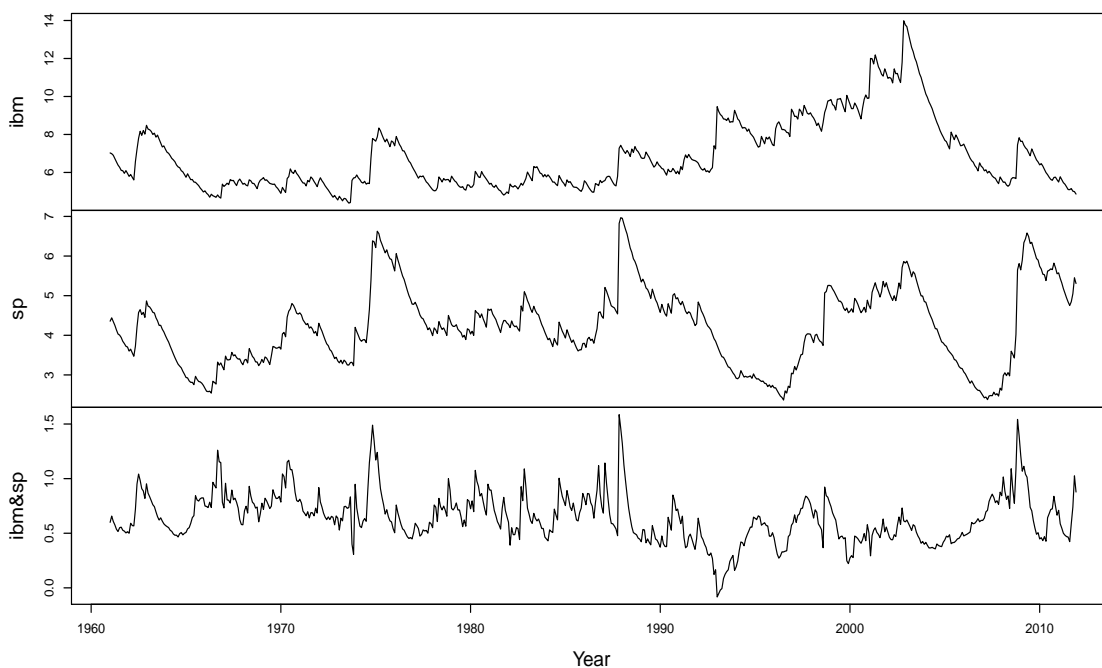
$$\Sigma_t = \mathbf{A}\mathbf{A}' + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i \mathbf{X}_{t-i} \mathbf{X}'_{t-i} \mathbf{A}'_i + \sum_{i=1}^p \mathbf{B}_i \Sigma_{t-i} \mathbf{B}'_i,$$

missä  $\mathbf{A}$  on alakolmiomatriisi ja  $\mathbf{A}_i$  sekä  $\mathbf{B}_i$  ovat  $m \times m$ -matriiseja.

Mallin haittapuolena on, että parametrien määrä kasvaa nopeasti prosessin dimension kasvaessa. Lisäksi parametriestimaatit ovat usein ei-merkittäviä ja niiden tulkinta on hankalaa. Paketin MTS funktion BEKK11 avulla voidaan estimoida BEKK(1,1)-malli IBM:n ja SP500:n tuottosarjoille:

```
mod2 <- BEKK11(data)
```

Huomaa, että estimointi kestää kauan! Kuvion 4.2 estimointitulosta voidaan verrata eksponentiaalisella liukuvan keskiarvon menetelmällä saatuun (kuvio 4.1). Volatiliteettisarjat näyttävät hyvin samankaltaisilta; korrelaatioisarjoissa on enemmän eroja.



Kuvio 4.2: IBM-yhtiön ja SP500-indeksin kuukausittaisten osaketuottosarjojen volatiliteetit prosentteina ja korrelaatio BEKK(1,1)-mallin avulla estimoituina.

### 4.3 GARCH(1,1)-malli

Suoraviivainen yleistys GARCH(1,1)-mallille on

$$\sigma_t^2 = \alpha + \mathbf{A}\mathbf{X}_{t-1}^2 + \mathbf{B}\sigma_{t-1}^2,$$

missä  $\boldsymbol{\sigma}_t^2 = (\sigma_{11,t}, \dots, \sigma_{mm,t})'$  ja  $\mathbf{X}_t^2 = (X_{t1}^2, \dots, X_{tm}^2)'$ , ja  $\mathbf{A}$  ja  $\mathbf{B}$  ovat  $m \times m$ -matriiseja. Merkitsemällä  $\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{X}_t^2 - \boldsymbol{\sigma}_t^2$  malli voidaan myös esittää muodossa

$$\mathbf{X}_t^2 = \boldsymbol{\alpha} + (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{X}_{t-1}^2 + \boldsymbol{\eta}_t - \mathbf{B}\boldsymbol{\eta}_{t-1},$$

joka määrittelee ARMA(1,1)-prosessin vektorille  $\mathbf{X}_t^2$ . Jotta prosessi voisi olla stationaarinen, matriisin  $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  ominaisarvojen pitää olla itseisarvoltaan pienempiä kuin 1 (harjoitustehtävä). Lisäksi, jotta ehdolliset varianssit pysyisivät positiivisina, täytyy olettaa, että vektorin  $\boldsymbol{\alpha}$  komponentit ovat positiivisia ja matriisien  $\mathbf{A}$  ja  $\mathbf{B}$  elementit ei-negatiivisia.

Tämä malli ei ota huomioon tuottojen korrelaatorakennetta. Se voidaan olettaa vakioksi tai sitten mallia voidaan täydentää eri tavoin. Yksi vaihtoehto on hyödyntää Choleskyn hajotelmaa, joka kaksiulotteisessa tapauksessa voidaan esittää seuraavasti:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11,t} & \sigma_{12,t} \\ \sigma_{21,t} & \sigma_{22,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21,t} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11,t} & 0 \\ 0 & g_{22,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{21,t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tuotot  $X_{t1}$  ja  $X_{t2}$  voidaan palauttaa hajotelman avulla korreloimattomiin komponentteihin  $Z_{t1}$  ja  $Z_{t2}$ :

$$\begin{aligned} X_{t1} &= Z_{t1}, \\ X_{t2} &= l_{21,t}Z_{t1} + Z_{t2}. \end{aligned}$$

Tällöin  $\text{Var}(Z_{1t}) = g_{11,t}$  ja  $\text{Var}(Z_{2t}) = g_{22,t}$ .

Yksinkertainen, Choleskyn hajotelmaa hyödyntävä kaksiulotteinen GARCH-malli on

$$\begin{aligned} g_{11,t} &= \alpha_{10} + \alpha_{11}Z_{1,t-1}^2 + \beta_{11}g_{11,t-1} \\ l_{21,t} &= \gamma_0 + \gamma_1 l_{21,t-1} + \gamma_2 g_{11,t-1}^{-1} X_{1,t-1} X_{2,t-1}, \\ g_{22,t} &= \alpha_{20} + \alpha_{21}Z_{1,t-1}^2 + \alpha_{22}Z_{2,t-1}^2 + \beta_{21}g_{11,t-1} + \beta_{22}g_{22,t-1}, \end{aligned}$$

jossa prosessi  $\{X_{t1}\}$  esiintyy eksogeenisena.

Esimerkkikoodissa `mvolEsim.R` on mallin log-uskottavuusfunktio `chl`, jonka avulla malli voidaan estimoida. Sovitettuja volatilitteetti- ja korrelaatio-sarjoja voidaan verrata EWMA- ja BEKK-menetelmillä saatuihin.