Stokastikka I, harjoitustehtävät 3, syksy 2010

1. Näytämme että stokastinen konvergenssi on aidosti heikompi kuin melkein varmaa konvergenssia: Olkoon $\Omega = (0, 1]$ varustettu Borel σ-algebralla $\mathcal{F} = \mathcal{B}((0, 1])$ tasaisella todennäköisyydella , siis $P((0, t]) = t$, kun $t \in (0, 1]$.

   Määritellään satunnaismuuttujen jono

   $$X_{n,k}(\omega) = \mathbf{1}_{(k2^{-n},(k+1)2^{-n}]}(\omega) \quad k = 0, 1, \ldots, (2^n - 1)$$

   jossa indeksit voidaan järjestää seuraavaksi: $(n, k) \geq (m, h)$ jos ja vain jos $n > m$ tai $n = m$ ja $k \geq h$.

   Seuraa että $\forall \omega \in (0, 1]$ kun $(n, k) \to \infty$ järjsteyksen mukaisesti,

   $$\lim \inf_{n,k\to\infty} X_{n,k}(\omega) = 0 \neq \lim \sup_{n,k\to\infty} X_{n,k}(\omega) = 1, \text{ ja}$$
   $$P(\{\omega : X_{n,k} > 1/2\}) = P((k2^{-n}, (k + 1)2^{-n}]) = 2^{-n} \to 0 \text{ kun } n \to \infty\ .$$

   Etsi jonolle $(X_{n,k}(\omega), n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n)$ aliljono $(X_{n(l),k(l)} : l \in \mathbb{N})$ jolla $X_{n(l),k(l)}(\omega) \to 0$ P-m.v. kun $l \to \infty$.

2. Osoita että $d(X, Y) = E_P(1 \wedge |X - Y|)$ on metriikka (eli kolmion epäyhtälö on voimassa), ja $d(X_n, X) \to 0$ jos ja vain jos $X_n \xrightarrow{P} X$ (stokastisen konvergenssin mielessä).

3. Olkoon $X(\omega) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, gaussinen

   - Laske

     $$m_X(\theta) = E_P(\exp(\theta X)) < \infty \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

   - Laske X:n jakauman Esscherin muunnoksen jälkeen

     $$P_\theta(X \in A) := \frac{E_P(\exp(\theta X)\mathbf{1}(X \in A))}{E_P(\exp(\theta X))}$$

4. Finanssi matematiikassa mallitaan osakkeen arvo S_t log-normalisella jakaumalla, siis

   $$S_t(\omega) = S_0 \exp\left(\theta\sqrt{t}X(\omega) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)$$

   jossa $S_0 > 0$ on osakkeen arvo hetkellä 0 ja $X(\omega) \sim \mathcal{N}(0, 1)$, eli P:n suhteen $X(\omega)$ on standardi gaussinen jolla $E_P(X) = 0$ ja $E_P(X^2)$.

   Europpalainen optio on satunaissmuuttuja $H(\omega) = h(S_t(\omega))$,

   Option hinta hetkellä 0 on $c(t, S_0, \theta) := E_P(h(S_t))$.

   Oleta että $x \mapsto h(x)$ on derivoituva ja osoita että $c(t, S_0, \theta)$ on derivoituva parametrien suhteen.

   Huomautus: Tiedoksi, osittais-integroinnilla voidaan myös luopua h:n derivoituvuuden oletuksesta.