Stokastikka I, harjoitustehtävät 4, syksy 2010

1. Osoita että $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on konveksi jos ja vain jos on absoluuttisesti jatkuva Lebesgue mitan suhteen ja Radon-Nikodymin-derivaatta $\frac{dg}{dx}(x)$ on ei-vähenevä.

2. Osoita että kuvaus $x \mapsto |x|^p$ on konveksi kun $p \geq 1$.

3. Olkoon $X(\omega), Y(\omega) \in \mathbb{R}$ s.m. ja

$$m_X(s,t) := E_P(\exp(tX + sY)) \in (0, +\infty]$$

Milloin

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} m_X(t,s) E_P(XY)$$

esittele riittävä ehto.

4. Olkoon $X(\omega) \in \mathbb{R}, Y(\omega) \in \mathbb{N}$ jolla

$$P\big(X \in dx, Y = n\big) = \begin{cases} \exp(-2x)\frac{x^n}{n!}dx & \text{kun } n \in \mathbb{N}, x \geq 0 \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$$

Laske $E_P(X), E_P(Y), E_P(X^2)E_P(Y^2)$ ja $E_P(XY)$.
Selitys

$$P\big(X \in dx\big) = \mathbf{1}(x \geq 0)\exp(-x)dx \qquad X \text{ n 1-eksponentiaalinen}$$

$$P_x(Y = n) = \mathbf{1}(n \in \mathbb{N})\exp(-x)\frac{x^n}{n!} \qquad Y \text{ on Poisson jakautunut parametrilla } x$$

$$P\big(X \in dx, Y = n\big) = P\big(X \in dx\big)P_x(Y = n)$$

5. Olkoon $X, Y \in L^2(P)$, ja olkoon

$$H := \{aY(\omega) + b : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq L^2(P)$$

Laske projektio $\hat{X}(\omega) = (\Pi_H X)(\omega) = \hat{a}Y + \hat{b} \in H$ jossa $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}$ ovat deterministisia,

$$E_P\big((X - \hat{a}Y - \hat{b})^2\big) \leq E_P\big((X - aY - b)^2\big)$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ ja

$$E_P(X(aY + b)) = E_P\big((\hat{a}Y + \hat{b})(aY + b)\big)$$