Stokastikka I, harjoitustehtävät 5, syksy 2010

1. Osoita:

   - Kun $X, Y \in L^2(P)$,

     $\| X+Y \|_2^2 + \| X-Y \|_2^2 = 2 \| X \|_2^2 + 2 \| Y \|_2^2$ (Suunnikkaan identiteetti)

   - $$E_P(XY) = \frac{1}{4}\big(\| X+Y \|_2^2 - \| X-Y \|_2^2 \big)$$ (Polarisaation identiteetti)

   - Normi $\| x \|$ toteuttaa suunnikkaan identiteetti, jos ja vain jos polaarisaatio identitetti määrittele skalaari tulo (x,y) (bilineaarinen ja positiivinen) jolla $\| x \|^2 = (x,x)$.

2. Todennäköisyys avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $X(\omega)$ satunnaismuuttuja jolla

   - **a)** $P(X \in dx) = \mathbf{1}(x \geq 0) \exp(-x) dx$, X on 1-eskponentiaalinen
   - **b)** $P(X \in dx) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1} dx$, X on Cauchy jakautunut.

   Osoita että tapauksessa **a)** $E_P(|X|) < \infty$ ja tapauksessa **b)** $E_P(|X|) = \infty$

   Olkoon $Y(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq X(\omega)\} \in \mathbb{Z}$.

   Laske tapauksissa **a**) ja **b**) ehdollinen odotusarvo

   $$E_P(X|\sigma(Y))(\omega) \in \mathbb{R}$$

   Vihje Huomaat että σ-algebra $\sigma(Y)$ on numeroituvasti generoitu, eli on olemassa numeroituva $\mathcal{F}$-mitallinen ositus joka virittää σ-algebraa.

3. Olkoon $X(\omega)$ ja $Y(\omega)$ Păriippumattomia ja tasaisesti jakautuneita välissä $[0,1]$, siis

   $$P(X \in dx, Y \in dy) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\, \mathbf{1}_{[0,1]}(y)\, dx\, dy$$

   Olkoon $Z(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$ Laske ehdollinen odotusarvo $E_P(X|\sigma(Z))(\omega)$.

   Vihje

   $$E_P(Z|\sigma(Z)) = E_P\big(E_P(X|\sigma(Z,I))\big|\sigma(Z)\big)$$

   jossa $I(\omega) := \mathbf{1}(X(\omega) \leq Y(\omega))$ ja tietenkin $\sigma(Z,I) \supseteq \sigma(Z)$.