Stokastikka I, harjoitustehtävät 6, syksy 2010

1. Olkoon $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali σ-algebra Verifioi kaava

$$\mathrm{Cov}_P(X,Y) = E_P\big(\ \mathrm{Cov}(X,Y|\mathcal{G})\big) + \mathrm{Cov}_P\big(E_P(X|\mathcal{G}), E_P(Y|\mathcal{G})\big)$$

silloin kun $\mathcal{G} = \sigma(X)$ tai $\mathcal{G} = \sigma(Y)$.

2. Olkoon satunnaismuuttujat $X(\omega), Y(\omega), Z(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Olkoon

$$H = \big\{a(Y) + b(Y)Z : a, b \text{ Borel mitalliset funktiot}\big\} \cap L_2(\Omega, \sigma(Y,Z), P)$$

eli H koostuu neliö-integroituvista ja $\sigma(Z,Y)$ mitallisista satunnaismuuttujsta jotka riippuvat lineaarisesti $Z(\omega)$:sta.

- Osoita että

$$\hat{X}(\omega) = E_P(X|\sigma(Y)) + \Big(Z(\omega) - E_P(Z|\sigma(Y))(\omega)\Big)\frac{\mathrm{Cov}_P(XZ|\sigma(Y))(\omega)}{\mathrm{Var}_P(Z^2|\sigma(Y))(\omega)}$$

on X:n ortogonaalinen projektio aliavaruuteen H.
- Laske ehdollinen neliövirhe $E_P((\hat{X} - X)^2|\sigma(Y))(\omega)$.
- Laske neliövirhe $E_P((\hat{X} - X)^2)$.

3. Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N})$ riippumattomien satunnaismuuttujen jono jolla $X_t(\omega) \geq 0$ P-m.v. ja $E(X_t) = \mu \in [0, +\infty)$, ja olkoon $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_t)$
Osoita: tuloprosessi $M_t = (X_1 X_2 \ldots X_t)$ on $\mathbb{F}$-alimartingaali kun $\mu > 1$, ja $\mathbb{F}$-ylimartingaali kun $\mu < 1$, ja $\mathbb{F}$-martingaali kun $\mu = 1$.

4. Olkoon $X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ $t \in \mathbb{N}$, diskreetti aikainen Markovin ketju alkujakaumalla $\pi(dx)$ ja siirtymäytimellä $K(x, dy)$.
Olkoon $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_t)$.
Määritellään operaattori

$$(Kf)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y)K(y, dx) = E_x(f(X_1)) = E_P(f(X_t)|X_{t-1} = x)$$

Osoita että

$$M_t(f) = \sum_{s=1}^{t}(f(X_s) - (Kf)(X_{s-1}))$$

on $\mathbb{F}$-martingaali kun $f(x)$ on rajoitettu ja Borel mitallinen.
Teleskoppisen summan esityksestä,

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{s=1}^{t}(f(X_s) - f(X_{s-1}) =$$

$$f(X_0) + \sum_{s=1}^{t}(f(X_s) - Kf(X_{s-1}) + \sum_{s=1}^{t}((Kf)(X_{s-1}) - f(X_{s-1}))$$

$$= f(X_0) + M_t(f) + A_t(f)$$

saadaan Doobin hajotelma jossa $A_t(f)$ on ennustettava prosessi