Stokastikka I, harjoitustehtävät 7, syksy 2010

Olkoon satunnaismuuttujat $(U_t : t \in \mathbb{N})$ P-riippumattomia ja tasaisesti jakautuneita välissä $[0,1]$, $P(U_1 \in dx) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)dx$. Silloin $E_P(U_t) = 1/2$.

1. Osoita että $\log(U_1) \in L^1(P)$ laskemalla odotusarvoa $E_P(\log(U_1))$.

2. Olkoon $Z_0 = 1$

$$Z_t(\omega) = 2^t \prod_{s=1}^{t} U_s(\omega)$$

osoita että (Z_t) on martingaali filtraatiossa $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N})$, jossa $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_1, Z_2, \dots, Z_t) = \sigma(U_1, U_2, \dots, U_t)$.

3. Osoita että $E_P(Z_t) = 1$.

4. Mitä johtopäätöksiä voi tehdä Doobin martingaali konvergenssilauseen perustella ? Osoita että on olemassa P-melkein varmasti rajarvo $Z_\infty(\omega) = \lim_{t\to\infty} Z_t(\omega)$.

5. Laske P-melkein varma raja-arvo

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} \log(U_i(\omega))$$

Kolmogorovin vahva suurten lukujen lain avulla.

6. Osoita että

$$Z_\infty(\omega) = 0 \qquad P\text{-melkein varmasti}$$

Vihje Laske ensin P-melkein varma raja-arvo

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(Z_t(\omega))$$

7. Osoita että $Z_t(\omega)$ ei suppene $L^1(P)$-mielessä kohti $Z_\infty(\omega)$.

8. Osoita että martingaali $(Z_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ ei ole tasaisesti integroituva

9. Osoita että $\log(Z_t(\omega))$ on ylimartingaali ja selitä miksi Doobin martingaalikonvergenssi lause ei sovellu siihen.

10. Koska $Z_t(\omega) \geq 0$ on $\mathcal{F}_t$-mitallinen, ja $E_P(Z_t) = E_P(Z_0) = 1$, seuraa että

$$Q_t(A) := E_P(Z_t \mathbf{1}_A) \qquad \forall A \in \mathcal{F}_t$$

on todennäköisyysmitta todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$.

Osoita että satunnaismuuttujat $(U_1, \dots, U_t)$ ovat rippumattomia ja samoin jakautuneita myös Q_t:mitan suhteen, ja laske niiden tiheysfunktio Q_t mitan suhteen.

11. Osoita että satunnaismuuttuja $-\log(U_1(\omega))$ on 1-eksponentiaalisesti jakautunut P-mitan suhteen, eli

$$P(-\log(U_1) > x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{kun } x \geq 0 \\ 1 & \text{kun } x < 0 \end{cases}$$