Stokastiikka

Dario Gasbarra

28. lokakuuta 2010

Sisältö

1 Esitiedot edellisistä todennäköisyys- ja mittateorian kursseista

1. Charatheodoryn laajennus lause
2. Dynkinin lause todennäköisyyden laajennuksen yksikäsitteisyydestä
3. Odotusarvojen monotonisen konvergenssin lause
4. Tulo avaruudet, Fubinin lause ja riippumattomuus
5. Borel-Cantellin lemmat
6. Mitan-vaihto kaava odotusarvolle : Radon-Nykodim lause (todistetaan myöhemmin täällä kurssilla)

2 Todennäköisyys äärettömissä tulo-avaruuksissa: satunnais-jonot ja stokastiset prosessit

Jatkossa työskentelemme todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ joka on tarpeeksi rikas sisältämään P-rippumattomien satunnaismuuttujen jonoja $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$. Haluamme varmistaa ensin että selläinen on olemassa.

Esimerkiksi jono P-riippumattomia kolikon heittoja $(X_i(\omega) : i \in \mathbb{N})$ joilla $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = p_i$.

Sille äärellinen tuloavaruus $\Omega_n = \{0,1\}^n$ varustettuna tulomitalla $\mathbb{P}^n := P_1 \otimes \cdots \otimes P_n$ ei riitä.

2.1 Kolmogorovin laajennuslause

Vaikka tässä kurssissa todennäköisyysmittojen jonon tulomitan olemassaolo tuloavaruudessa riittäisi meille hyvin pitkälle,

todistamme saman tien Kolmogorovin laajennuslausetta, joka koskee mielivaltaisia tuloavaruuksia, eikä rajoitu tulomittoihin.

Todistuksessa ei käytetä muuta kun Caratheodoryn laajennuslauseetta ja pientä kompaktisuus-argumenttia.

Vaikka jatkossa me esitämme aina kun on mahdollista probabilistista todistusta, tässä vaiheessa emme voi välttää kokonaan analyyttisia argumentteja.

Määritelmä 2.1. *Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$ satunnaisprosessi on satunnaismuuttujen perhe $(X_t : t \in \mathbb{T})$ jossa $\mathbb{T}$ on mielivaltainen indeksijoukko, ja $X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$.*

Esimerkiksi $\mathbb{T} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$ voisi olla aikaparametri, diskreetti tai jatkuva.

Määritelmä 2.2. *Äärellisulotteisten todennäköisyysmittojen perhe $\mathbb{R}$:ssa on*

$$\Big(P_{t_1,\dots,t_n} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,1], \quad n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T} \Big)$$

on **yhteensopiva** *, jos*

1.

$$P_{t_1,\dots,t_n}(A_1\times\cdots\times A_n)=P_{t_{\pi(1)},\dots t_{\pi(n)}}\big(A_{t_{\pi(1)}}\cdots\times A_{t_{\pi(n)}}\big)$$
$$\forall n\in\mathbb{N},A_1,\dots A_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),t_1,\dots,t_n\in\mathbb{T},\quad\forall\text{ permutaatiolle }\pi$$

2.

$$P_{t_1,\dots,t_n}(A_1\times\cdots\times A_n)=P_{t_1,\dots,t_n,t_{n+1}}(A_1\times\cdots\times A_n\times\mathbb{R})$$

Korostamme että seuraavassa lauseessa indeksijoukko $\mathbb{T}$ on mielivaltainen.

Teoreema 2.1. *(Daniell-Kolmogorov,1933) Olkoon*

$$\Big(P_{\mathbf{t}}:\mathbf{t}\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{T}^n\Big)$$

yhteensopiva perhe äärellisulotteisista todennäköisyysjakaumoista $\mathbb{R}$:ssa, indeksijoukolla $\mathbb{T}$.

On olemassa yksikäsitteinen todennäköisyysmitta $\mathbb{P}$ tuloavaruudella $\Omega=\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ varustettuna tulo-topologian virittämällä sylinterien σ-algebralla $\sigma(\mathcal{C})$,

jolla $\forall n\in\mathbb{N},t_1,\dots,t_n\in\mathbb{N},B_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathbb{P}\bigg(\Big\{\omega\in\mathbb{R}^{\mathbb{T}}:\ (\omega_{t_1},\dots,\omega_{t_n})\in B_n\Big\}\bigg)=P_{t_1,\dots,t_n}(B_n)\tag{2.1}$$

Sen lisäksi kanoniset kuvaukset $\omega\mapsto X_t(\omega):=\omega_t$ kun $\omega\in\Omega=\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ muodostuvat stokastinen prosessi $(X_t(\omega):t\in\mathbb{T})$ jolla on annetut äärellis-ulotteiset jakaumat

$$\mathbb{P}\bigg(\Big\{\omega:(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_n}(\omega))\in B_n\Big\}\bigg)=P_{t_1,\dots,t_n}(B_n)\tag{2.2}$$

Todistus

Tuloavaruuden $\Omega=\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ jäsenet ovat kuvaukset $t\mapsto\omega_t\in\mathbb{R}$.

$\sigma(\mathcal{C})$ on pienin σ-algebra jolla kaikille $t\in\mathbb{T}$ kanooniset kuvaukset

$$\omega\mapsto X_t(\omega)=\omega_t$$

ovat $(\Omega,\sigma(\mathcal{C}))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mitallisia.

Määritellään algebra $\mathcal{C}$ joka sisältää sylinterit

$$C=\Big\{\omega\in\mathbb{R}^{\mathbb{T}}:(\omega_{t_1},\dots,\omega_{t_n})\in B_n\Big\}$$

jossa $n\in\mathbb{N},t_1,\dots,t_n\in\mathbb{N},B_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Kaava (2.1) määrittelee kuvauksen $\mathbb{P}:\mathcal{C}\to[0,1]$.

Yhteensopivuuden oletuksesta seuraa että $\mathbb{P}(C)$ on hyvin määritelty, siis ei riipu sylinterin C:n esityksestä.

Koska kahdelle sylintereille löytyy esityksiä yhteisellä indeksijoukolla, ja koska äärellis-ulotteiset jakaumat ovat todennäköisyydet, ei ole vaikea osoittaa että kuvaus $\mathbb{P}:\mathcal{C}\to[0,1]$ on äärellisesti additiivinen.

Kun osoitamme että $\mathbb{P}$ on myös σ-additiivinen $\mathcal{C}$ algebrassa, Charatheodoryn laajennuslause astuu voimaan ja $\mathbb{P}$ voidaan laajentaa yksikäsitteisesti σ-additiiviseksi todennäköisyysmitaksi joka on määritelty σ-algebrassa $\sigma(C)$.

Eli jää osoitettavaksi väite:
jos $\{C_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$ on sylinterien jono jolla

$$C_n \supseteq C_{n+1} \forall n, \text{ ja } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \emptyset,$$

seuraa $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_n) = 0$.

Vastaoletuksella $C_n \supseteq C_{n+1}$ ja $\mathbb{P}(C_n) \geq \varepsilon \ \forall n$ jollekin $\varepsilon > 0$, näytämme että $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

Valitsemalla sopivasti sylinterien esityksiä ja mahdollisesti toistaamalla sylintereita jonossa, voidaan aina rakentaa indeksijonoa $(t_n) \subseteq \mathbb{T}$ ja sylinterijono $\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ jolla on esitys

$$D_n = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_n}) \in A_n \right\}$$

jossa $D_n \supseteq D_{n+1} \forall n$, $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $A_n \times \mathbb{R} \supseteq A_{n+1} \forall n$, ja kaikille $m \in \mathbb{N}$ on olemassa n jolla $D_n = C_m$.

Seuraa että $\mathbb{P}(D_n) \geq \varepsilon > 0 \ \forall n$ ja

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n \ .$$

Koska $P_{t_1,\ldots,t_n}$ on todennäköisyysmitta $\mathbb{R}^n$:ssa ja siksi σ-additiivinen, ja A_n on Borel mitallinen, on olemassa suljettu joukko $F_n \subseteq A_n$ (katso tehtävä 1) jolla

$$P_{t_1,\ldots,t_n}(A_n \setminus F_n) < \varepsilon 2^{-n} \ .$$

Valitsemalla tarpeeksi suurta origo-keskeistä palloa $B(0, r_n)$, löytyy myös kompakti $K_n = \big(F_n \cap B(0, r_n)\big) \subseteq A_n$ jolla edelleen

$$P_{t_1,\ldots,t_n}(A_n \setminus K_n) = \mathbb{P}(D_n \setminus G_n) < \varepsilon 2^{-n}$$

jossa

$$G_n := \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_n}) \in K_n \right\}$$

Koska nämä eivät välttämättä muodosta vähenevää jonoa, otamme leikkaukset

$$G'_n = \bigcap_{m=1}^{n} G_m = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_n}) \in K'_n \right\}$$

jossa

$$K'_n := K_n \cap (K_{n-1} \times \mathbb{R}) \cap \cdots \cap (K_1 \times \mathbb{R}^{n-1}) \subseteq K_n$$

ovat kompakteja (kompakti ja sulijetun joukon leikkaus on kompakti).

Seuraa $G'_n \supseteq G'_{n+1}$, ja $(K'_n \times \mathbb{R}) \supseteq K'_{n+1}$.

Tästä seuraa

$$
\begin{aligned}
&P_{t_1,\dots,t_n}(K'_n) = \mathbb{P}(G'_n) = \mathbb{P}(D_n) - \mathbb{P}(D_n \setminus G'_n) = \\
&P_{t_1,\dots,t_n}(A_n) - P_{t_1,\dots,t_n}\bigg(\bigcup_{m=1}^{n} A_n \setminus (K_m \times \mathbb{R}^{(m-n)})\bigg) \\
&\geq P_{t_1,\dots,t_n}(A_n) - P_{t_1,\dots,t_n}\bigg(\bigcup_{m=1}^{n} (A_m \setminus K_m) \times \mathbb{R}^{(m-n)}\bigg) \\
&(\text{ koska } A_m \times \mathbb{R}^{(n-m)} \supseteq A_n \text{ kun } n \geq m \text{ }) \\
&= \mathbb{P}(D_n) - \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{m=1}^{n} D_m \setminus G_m\bigg) \\
&\geq \mathbb{P}(D_n) - \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(D_m \setminus G_m) \geq \varepsilon - \sum_{m=1}^{n} \varepsilon 2^{-m} > \frac{\varepsilon}{2} > 0
\end{aligned}
$$

jossa käytettiin vastaoletusta $\mathbb{P}(D_n) > \varepsilon$.

Siksi $\forall n$, $\exists (x_1^{(n)} \dots, x_n^{(n)}) \in K'_n \neq \emptyset$.

Koska jono G'_n ei kasva, seuraa että $(x_1^{(n)}) \subseteq K'_1 \subseteq \mathbb{R}$

K'_1 on kompakti, siksi on olemassa suppeneva alijono $x_1^{(n_l)} \to x_1^* \in K'_1$.

Myös alijono $(x_1^{(n_l)}, x_2^{(n_l)}) \subseteq K'_2$, ja on olemassa suppeneva alijonon alijono jolla on raja $(x_1^*, x_2^*) \in K'_2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

Induktiivisesti löytyy jono (x_n^*) jolla $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in K'_n \subseteq \mathbb{R}^n \ \forall n$.

Joukot

$$
D^* = \bigg\{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : \omega_{t_n} = x_n^* \quad \forall n\bigg\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G'_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n
$$

eivät ole tyhjiä $\square$

Seuraavaksi näytämme että Kolmogoroviin lause on voimassa silloin kun prosessi $X_t(\omega)$ saa arvot hyvin yleisemmässa avaruudessa.

Määritelmä 2.3. Borelin avaruus $(S, \mathcal{S})$ *on todennäköisyys avaruus joka on kuvattavissa mitallisen bijektion kautta (jolla on myös mitallinen käänteiskuvaus) johonkin* $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$*-avaruuten mitaaliseen joukkoon.*

Seuraus 2.1. *Kolmogorovin laajennuslause soveltuu myös tuloavaruuteen* $S^{\mathbb{T}}$ *kun* $(S, \mathcal{S})$ *on Borelin avaruus (esimerkiksi* $\mathbb{R}^d$*), mielivaltaisella indeksijoukolla* $\mathbb{T}$.

Todistus Olkoon $f : S \leftrightarrow B \in \mathcal{B}([0,1])$ mitallinen bijektio,

ja $(P_{t_1,\dots,t_n} : n \in \mathbb{N}, t_i \in \mathbb{T})$ on yhteensopivien äärellisulotteinen jakaumien perhe Borel avaruudessa S.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}([0,1])$

$$
Q_{t_1,\dots,t_n}(B_1 \times \dots \times \in B_n) := P_{t_1,\dots,t_n}(f^{-1}(B_1) \times \dots \times f^{-1}(B_n))
$$

jossa mitallisuudesta seuraa $f^{-1}(B_i) \in \mathcal{S}$, määrittelee yhteensopiva äärellisulotteisten todennäköisyysjakaumien perhe $\mathbb{R}$:ssa, (koska n-ulotteiset suorakulmaiset joukot muodostuvat Dynkinin d-luokan joka virittää koko tulo σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$).

Kolmogorovin laajennuksen perusversio 2.1 soveltuu, on olemassa todennaköisyysmitta $\mathbb{P}$ ja stokastinen prosessi $(Y_t(\omega) : t \in \mathbb{T})$ kanonisessa avaruudessa $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ jolla

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(Y_{t_1}(\omega) \in B_1, \dots, Y_{t_n}(\omega) \in B_n) = Q_{t_1,\dots,t_n}(B_1 \times \dots \times B_n)\\ &= P_{t_1,\dots,t_n}(f^{-1}(B_1) \times \dots \times f^{-1}(B_n))\end{aligned}$$

Seuraa tästä $X_t(\omega) := f^{-1}(Y_t(\omega))$, on stokastinen prosessi joka saa arvot Borel avaruudessa $(S, \mathcal{S})$ ja

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{t_1}(\omega) \in S_1, \dots, X_{t_n}(\omega) \in S_n) = \mathbb{P}(Y_{t_1}(\omega) \in f(S_1), \dots, Y_{t_n}(\omega) \in f(S_n))\\ &= Q_{t_1,\dots,t_n}(f(S_1) \times \dots \times f(S_n)) = P_{t_1,\dots,t_n}(S_1 \times \dots \times S_n) \quad \square\end{aligned}$$

Tehtävä 2.1. *Separoituva metrinen avaruus (S, d) varustettuna Borelin σ-algebralla (metrisen avaruuden avoimien joukkojen virittämä) on Borelin avaruus.*

Todistuksen linja (ei viety loppuun asti) : Metrinen avaruus on separoituva kun on olemassa numeroituva jono $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ joka on tiheä S:ssa metrisen topologian suhteen, eli $\forall x \in S$ on olemassa alijono $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ jolla $d(y_{n_k}, x) \to 0$.

Tämän alijonon kautta voidaan koodata jokaisen pisteen $x \in S$ "osoiteetta" yksikäsitteisesti binäärijonolla.

Kyseinen kuvaus voidaan rakentaa seuraavasti: olkoon

$$n_k := \text{argmin}_{1\le m<2^k}\{d(y_m, x)\}$$

jossa käytetään $\{y_n\}$ jonon järjestystä silloin kun minimi ei ole yksikäsitteinen.

Selvästi $y_{n_k} \to x$.

Koska $n_k \le 2^k$, sen binääri kehitelmä

$$n_k = \sum_{m=0}^{k-1} \eta_m^{(k)} 2^m, \quad \eta_m^{(k)} \in \{0, 1\}$$

voidaan koodata sanalla $\eta^{(k)} = (\eta_0^{(k)}, \dots, \eta_{k-1}^{(k)}) \in \{0, 1\}^k$).

Yhdistämällä toisen perään sanat $\eta^{(k)}, k \in \mathbb{N}$ saadaan binääri jonoa joka vastaa taas jonkun luvun $u(x) \in [0, 1]$ binääri-kehitelmä. Kuvaus $x \mapsto u(x)$ on injektiivinen, ja ei ole vaikea osoittaa että se on mitallinen, ja sen käänteiskuvaus $u^{-1} : u(S) \to S$ on myös mitallinen, silloin kun (S, d) varustetaan Borel σ-algebralla $\mathcal{B}(S)$.

Huomataan että

$$A_{k,l} := \{x \in S : n_k(x) = l\} \in \mathcal{B}(S),$$

kuvautuu johonkin dyadisten välien yhdisteseen joka kuluu σ-algebraan $\mathcal{B}([0, 1])$.

Dyadiset välit $(l2^{-k}, (l + 1)2^{-k}]$, $k \in \mathbb{N}, 0 \le l < 2^k$ virittävät $\mathcal{B}([0, 1])$.

Jää osoitettavaksi että $\sigma(A_{k,l}, k \in \mathbb{N}, 0 \le l < 2^k) = \mathcal{B}(S)$ $\quad \square$

Esimerkki 2.1. $\mathbb{R}^d \supseteq \mathbb{Q}^d$ *on Borel avaruus. Kolmogorovin laajennus soveltuu myös vektoriavoisille prosesseille.*

2.2 Tehtävät

1. Osoita: jos $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\forall \varepsilon > 0$ ja $\forall P$ todennäköisyysmittoja avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on olemassa olemassa avoin joukko U ja suljettu joukko F jolla $F \subseteq B \subseteq U$, ja $P(U \setminus F) < \varepsilon$.

   Vihje Olkoon $\mathcal{A}$ kokoelma joukoista joilla on kyseinen ominaisuus. Osoita että $\mathcal{A}$ on σ-algebra joka sisältää suljetut joukot, ja siksi sisältää kaikki Borelin joukot. Käytä σ-additiivisuutta !

2. Olkoon $(S, \mathcal{S})$ Borelin avaruus, ja $K(x, dy)$ a *todennäköisyys-ydin*, joka on kuvaus $K : S \times \mathcal{S} :\to [0, 1]$, jolla

   (a) $\forall x \in S$ kuvaus $A \mapsto K(x, A)$ on todennäköisyysmitta.

   (b) $\forall A \in \mathcal{S}$, kuvaus $x \mapsto K(x, A)$ on mitallinen.

   - Olkoon $x \in S$. Soveltakaa Kolmogorovin lajennuslausetta osoittamalla että on olemassa todennäköisyysmitta $\mathbb{P}_x$ jono avaruudessa $\Omega = S^{\mathbb{N}}$ ja stokastinen prosessi $(X_t(\omega) = \omega_t,\ t \in \mathbb{N})$ joilla kaikille n, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$,

   $$\mathbb{P}_x\Big(X_0(\omega) \in A_0, X_1(\omega) \in A_1, \dots, X_n(\omega) \in A_n \Big) =$$
   $$\mathbf{1}_{A_0}(x) \int_{A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_n} K(x_{n-1}, dx_n) K(x_{n-2}, dx_{n-1}) \dots K(x, dx_1)$$

   - Olkoon $\pi(dx)$ todennäköisyysmitta $(S, \mathcal{S})$. Osoite että on olemassa todennäköisyysmitta $\mathbb{P}_\pi$ jonojen avaruudessa $\Omega = S^{\mathbb{N}}$ ja satunnaismuuttujen jono joilla $(X_t(\omega) = \omega_t,\ t \in \mathbb{N})$ satisfies for all n, $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$,

   $$\mathbb{P}_\pi\Big(X_0(\omega) \in A_0, X_1(\omega) \in A_1, \dots, X_n(\omega) \in A_n \Big) =$$
   $$\int_{A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_n} K(x_{n-1}, dx_n) K(x_{n-2}, dx_{n-1}) \dots K(x_0, dx_1) \pi(dx_0)$$

     $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ kutsutaan Markovin prosessiksi alkujakaumalla $\pi(dx)$ ja siirtymäytimellä $K(x, dy)$.

   - Olkoon

   $$K^n(x, dy) := \mathbb{P}_x(X_n \in dy), n \in \mathbb{N} \tag{2.3}$$

     Osoita että $K^n(x, dy)$ $n \in \mathbb{N}$ ovat todennäköisyys-ytimiä jotka toteuttavat Chapmanin-Kolmogorovin yhtälö: $\forall m, n \in N$

   $$K^{n+m}(x, dy) = \int_S K^n(x, dz) P^m(z, dy) \tag{2.4}$$

3 Mitanvaihto kaava odotusarvolle

Käytämme seuraavat pikanotaatioita silloin kun selvää että on kyse satunnaismuuttujasta eikä tapahtumasta:

Olkoon $X(\omega)$ satunnaismuuttuja.

Jos X on $\mathcal{F}$-mitallinen merkitään $X \in \mathcal{F}$, tai $X \in L^0(\Omega, \mathcal{F})$.

Jos $X \in \mathcal{F}$ ja $X(\omega) \geq 0 \forall \omega$ merkitään $X \in \mathcal{F}^+$.

Jos $X \in \mathcal{F}$ ja $X(\omega) \geq 0$ P-m.v. merkitään $X \in L^0_+(\Omega, \mathcal{F})$.

Kun

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$$

jossa $x_i \in \mathbb{R}$ ja $A_i \in \mathcal{F}$, sanotaan että X on **yksinkertainen** satunnaismuuttuja ja merkitsemme $X \in \mathcal{YF}$. Merkisten myös $\mathcal{YF}^+ = \mathcal{YF} \cap \mathcal{F}^+$.

Todennäköisyys avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon satunnaismuuttuja $Z(\omega) \geq 0$ P-melkein varmasti jolla $0 < E_P(Z) < \infty$, josta seuraa myös $P(\{\omega : Z(\omega) > 0\}) > 0$.

Määritellään uusi todennäköisyysmitta $Q : \mathcal{F} \to [0, 1]$

$$Q(A) := \frac{E_P(Z\mathbf{1}_A)}{E_P(Z)} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Q on todennäköisyysmitta: Selvästi on additiivinen ja $Q(\Omega) = 1$. Osoitamme että on myös σ-additiivinen: kun $A_n \uparrow \Omega$, (eli $A_n \subseteq A_{n+1}$ ja $\bigcup_n A_n = \Omega$), myös $Z(\omega)\mathbf{1}_{A_n}(\omega) \uparrow Z(\omega)$ P-melkein varmasti. Monotonisen konvergenssin lauseesta (**??**) seuraa

$$Q(A_n)E_P(Z) = E_P\big(Z\mathbf{1}_{A_n}\big) \uparrow E_P(Z) = Q(\Omega)E_P(Z) \quad \Longrightarrow \quad Q(A_n) \uparrow 1$$

Voidaan myös käyttää normalisoitua muuttujaa

$$\widetilde{Z}(\omega) := \frac{Z(\omega)}{E_P(Z)}$$

jolla $E_P(\tilde{Z}) = 1$, ja kirjoittaa $Q(A) = E_P\big(\widetilde{Z}\mathbf{1}_A\big)$.

Teoreema 3.1. $\forall A \in \mathcal{F}$ $P(A) = 0 \implies Q(A) = 0$. *Sanotaan että Q on absoluuttisesti jatkuva P:n suhteen, ja merkitään $Q \ll P$.*

Tod. kun $P(A) = 0$, $Z(\omega)\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ P-melkein varmasti.

Teoreema 3.2. *Kun $X \in \mathcal{F}^+$, (eli $X(\omega) \geq 0$ P-m.v. ja $\mathcal{F}$-mitallinen) ,*

$$E_Q(X) = \frac{E_P(XZ)}{E_P(Z)},$$

ja $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ jos ja vain jos $(XZ) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Tod. Kun $X(\omega) \in \mathcal{YF}^+$, väite seuraa suoraan määritelmästä ja odotusarvon lineaarisuudesta. Kun $X \in \mathcal{F}^+$ on olemassa jono $\{X_n\} \subseteq \mathcal{YF}^+$ jolle $0 \leq X_n(\omega) \leq X(\omega)$ $\forall \omega$. Soveltamalla Monotonisen konvergenssin lauseen kaksi kertaa Q mitan alla ja P mitan alla, seuraa että $E_Q(X_n) \uparrow E_Q(X)$ ja

$$E_Q(X_n) = \frac{E_P(X_nZ)}{E_P(Z)} \uparrow \frac{E_P(XZ)}{E_P(Z)} \quad \square$$

Esimerkki 3.1. *Ehdollinen todennäköisyys*

Olkoon $B \in \mathcal{F}$ jolla $P(B) > 0$, ja suoritamme mitan vaihdon satunnaismuuttujalla $Z(\omega) = P(B)^{-1}\mathbf{1}_B(\omega)$, saadaan

$$P(A|B) := E_P(Z\mathbf{1}_A) = \frac{E_P(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad A \in \mathcal{F}$$

Kuvaus $P(\,\cdot\,|B) : A \in \mathcal{F} \mapsto P(A|B) \in [0,1]$ on todennäköisyysmitta, joka kutsutaan ehdolliseksi todennäköysyydeksi ehdolla B tapahtuman.

Hajotelmasta

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

on paljon hyötyä monimutkaisten tapahtumien todennäköisyyksien laskemisessa.

Satunnaismuuttujan $X \in L^1(P)$ ehdollinen odotusarvo ehdolla B tapahtuman on

$$E_P(X|B) := \frac{E_P(X\mathbf{1}_B)}{P(B)}$$

Huomaamme että tässä vaiheessa ehto $P(B) > 0$ on välttämätön. Miten ehdollisen odotusarvon käsite yleistyy P-nolla mittaisille tapahtumille B ? Vastaus esitetään kurssin loppupuolella.

Olemme rakentaneet mitan $Q \ll P$ satunnaismuuttujan $Z \in L^1(P)$ avulla. Tämä tulos kääntyy toisinpäin, kun $Q \ll P$ on olemassa $0 \le Z(\omega) \in L^1(P)$ jolle mitanvaihto kaava $Q(A) = E_P(Z\mathbf{1}_A)$ on voimassa.

Teoreema 3.3. *(Radon-Nikodym lause) Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$ olkoon P, Q todennäköisyysmittoja (yleisemmin P voisi olla σ-äärellinen mitta), joilla $Q(A) = 0$ aina kun $A \in \mathcal{F}$ ja $P(A) = 0$ (merkintä: $Q \overset{\mathcal{F}}{\ll} P$). Silloin on olemassa satunnaismuuttuja $0 \le Z(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jolle $E_P(Z) = 1$ ja*

$$Q(A) = E_P(Z\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$Z(\omega)$ on yksikäsitteinen vailla P-nolla joukkoja. Merkitään

$$Z(\omega) = \frac{dQ}{dP}(\omega),$$

joka kutsutaan uskottavuus-osamääräksi (engl. likelihood ratio) tai Radon-Nikodym derivaataksi.

R-N lause todistetaan kurssin loppupuolella martingaalien avulla.

Mitanvaihto-kaava saa muotoa

$$E_Q(X) = \int_\Omega X(\omega)Q(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)\,\frac{dQ}{dP}(\omega)\,P(d\omega)$$

Määritelmä 3.1. *Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$ todennäköisyysmitat P ja P' ovat singulaarisia (merkintä: $P \perp P'$), kun on olemassa $A \in \mathcal{F}$ jolla $P(A) = 0$ ja $P'(A) = 1$.*

Esimerkki 3.2. *Todennäköisyys avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon $\mathcal{F} = \sigma(X)$ jossa $X(\omega)$ on standardi-gaussinen satunnaismuuttuja jolla $E(X) = 0, E(X^2) = 1$, eli*

$$P(X \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\bigl(-\frac{x^2}{2}\bigr) dx$$

Olkoon P' toinen todennäköisyysmitta jolla

$$P'(X_i \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\bigl(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\bigr) dx$$

Laskemme uskottavuusosamäärät

$$Z'(\omega) = \frac{dP'}{dP}(\omega) \quad ja \quad Z(\omega) = \frac{dP}{dP'}(\omega) = \frac{1}{Z'(\omega)}$$

R-N lauseesta seuraa että $Z'(\omega)$ on $\sigma(X)$ mitallinen, siksi on olemassa Borel mitallinen kuvaus $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ jolla $Z'(\omega) = z'(X(\omega))$ (tehtävä 1).

Silloin, kaikille Borel mitallisille funktioille $f(x) \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp\bigl(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\bigr) dx = E_{P'}(f(X)) = E_P(f(X)Z') \\
&= E_P(f(X)z'(X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)z'(x) \exp\bigl(-\frac{x^2}{2}\bigr) dx
\end{aligned}$$

josta seuraa

$$\begin{aligned}
z'(x) &= \exp\bigl(\mu x - \frac{1}{2}\mu^2\bigr), \\
Z'(\omega) &= \exp\bigl(\mu X(\omega) - \frac{1}{2}\mu^2\bigr)
\end{aligned}$$

Koska $E_P(Z') = 1$, seuraa

$$E_P\bigl(\exp(\mu X)\bigr) = \exp\bigl(\frac{1}{2}\mu^2\bigr)$$

3.1 Lebesguen hajotelma

Olkoon P, P' todennäköisyysmittoja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$, joilla ei välttämättä $P \ll P'$ tai $P' \ll P$.

$Q := \frac{1}{2}(P + P')$ on todennäköisyysmitta jolla selvästi $P \ll Q$ ja $P' \ll Q$ σ-algebrassa $\mathcal{F}$.

R-N lauseesta (3.3) seuraa että uskottavuusosamäärät

$$\zeta(\omega) := \frac{dP}{dQ}(\omega) \text{ ja } \zeta'(\omega) := \frac{dP'}{dQ}(\omega) \ ,$$

ovat olemassa, ei-negatiivisiä ja $\mathcal{F}$-mitallisia.

Huomataan että koska $\forall \omega$

$$\zeta(\omega) + \zeta'(\omega) = \frac{2dP}{d(P+P')}(\omega) + \frac{2dP'}{d(P+P')}(\omega) = 2\, \frac{d(P+P')}{d(P+P')}(\omega) = 2$$

ja $\zeta(\omega) \geq 0, \zeta'(\omega) \geq 0$ seuraa

$$\zeta(\omega) \leq 2, \zeta'(\omega) \leq 2 \quad Q \text{ m.v.}, \quad \text{ja} \quad Q\big(\{\omega : \zeta(\omega) = 0\} \cap \{\omega : \zeta'(\omega) = 0\}\big) = 0.$$

Määritellään $\forall \omega \in \Omega$

$$Z(\omega) = \frac{dP}{dP'}(\omega) := \frac{\zeta(\omega)}{\zeta'(\omega)} \quad \text{ja } Z'(\omega) = \frac{dP'}{dP}(\omega) := \frac{\zeta'(\omega)}{\zeta(\omega)} = \frac{1}{Z(\omega)}$$

jossa $0/0$ saa mielivaltainen arvo, esimerkiksi 0.

Mitan-vaihto kaavan yleistys on

$$E_{P'}(X) = E_P(XZ') + E_{P'}(X\mathbf{1}(\zeta = 0))$$

kun $X \in \mathcal{F}^+$.

Todistus

$$\begin{aligned}
&E_{P'}(X) = E_{P'}\big(X\{\mathbf{1}(\zeta > 0) + \mathbf{1}(\zeta = 0)\}\big) = E_Q\big(X\zeta'\mathbf{1}(\zeta > 0)\big) + E_{P'}\big(X\mathbf{1}(\zeta = 0)\big) \\
&= E_Q\left(X\frac{\zeta'}{\zeta}\zeta\mathbf{1}(\zeta > 0)\right) + E_{P'}\big(X\mathbf{1}(\zeta = 0)\big) = E_Q(XZ'\zeta) + E_{P'}\big(X\mathbf{1}(\zeta = 0)\big) \\
&= E_P(XZ') + E_{P'}\big(X\mathbf{1}(\zeta = 0)\big) = E_P(XZ') + E_{P^\perp}(X)
\end{aligned}$$

jossa

$$P^\perp(d\omega) := \mathbf{1}(\zeta(\omega) = 0)P'(d\omega) \ ,$$

Siis

$$P'(d\omega) = Z'(\omega)P(d\omega) + \mathbf{1}(\zeta(\omega) = 0)P'(d\omega) = Z'(\omega)P(d\omega) + P^\perp(d\omega)$$

P ja $P^\perp$ ovat singulaarisia, koska joukolle $A := \{\omega : \zeta(\omega) = 0\}$ pätee

$$P(A) = 0 \text{ ja } P^\perp(A) = P^\perp(\Omega)$$

Koska $P^\perp(\Omega) + E_P(Z') = P'(\zeta = 0) + E_P(Z') = 1$, $P^\perp$ on todennäköisyysmitta jos ja vain jos $P \perp P'$, (silloin $P^\perp = P'$). Myös $E_P(Z') \leq 1$ ja $E_P(Z') = 1$ jos ja vain jos $P' \ll P$, silloin $P^\perp = 0$.

3.2 Harjoitukset

1. Olkoon $X(\omega)$ satunnaismuuttuja todennäkösyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$, ja olkoon $Z(\omega)$ $\sigma(X)$-mitallinen satunnaismuuttujal.

   Osoita että on olemassa Borel mitallinen kuvaus $x \in \mathbb{R} \mapsto z(x) \in \mathbb{R}$ jolla $Z(\omega) = z(X(\omega))$.

2. Todennäköisyys avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ P-rippumattomia ja samoin-jakautuneita standardi-gaussisia satunnaismuuttujat joilla

   $$P(X_i \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\big(-\frac{x^2}{2}\big)dx \quad i = 1, \ldots, n$$

   Olkoon P' toinen todennäköisyysmitta jolla $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ ovat P'-rippumattomia ja gaussisia samoinjakautuneita, jossa

   $$P'(X_i \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\big(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\big)dx \quad i = 1, \ldots, n$$

Kun $\mathcal{F} = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ laske uskottavuusosamäärät

$$Z'(\omega) = \frac{dP'}{dP}(\omega) \quad \text{ja} \quad Z(\omega) = \frac{dP}{dP'}(\omega)$$

3. Todennäköisyys avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ $\mathbb{R}$-arvoinen Markov prosessi jolla on alkujakauma

$$P(X_0 \in dx) = \pi(dx)$$

ja siirtymäydin $K(x, dy)$.

Olkoon P' toinen jakauma jonka suhteen $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ on myös Markov, alkujakaumalla $P'(X_0 \in dx) = \pi'(dx)$ ja siirtymäydimellä $K'(x, dy)$.

Oleta: $\pi' \ll \pi$ ja $\forall x \in \mathbb{R}$ $K'(x, \cdot) \ll K(x, \cdot)$

Kun $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, laske R-N derivaatta

$$Z_n(\omega) = \frac{dP'\big|_{\mathcal{F}_n}}{dP\big|_{\mathcal{F}_n}}(\omega)$$

jossa $P\big|_{\mathcal{F}_n}$ on todennäiköisyys P rajoitettuna σ-algebraan $\mathcal{F}_n$, ja R-N lause sovelletaan todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$, josta seuraa että $Z_n(\omega)$ pitää olla $\mathcal{F}_n$-mitallinen.

4. Olkoon $X_0(\omega) \in \mathbb{N}$, $P(X_0(\omega) = k) = \pi(k) \quad k \in \mathbb{N}$, ja

$$X_t(\omega) = \sum_{k=0}^{X_{t-1}(\omega)} Y_{t,k}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}(k \le X_{t-1}(\omega)) Y_{t,k}(\omega)$$

jossa s.m. $(X_0, Y_{t,k}(\omega) : t, k \in \mathbb{N})$ ovat P-riippumattomia ja

$$P(Y_{t,i} = k) = p(k) \quad k \in \mathbb{N} \quad \forall t, i \in \mathbb{N}$$

Prosessi $(X_t : t \in \mathbb{N})$ on diskreettiaikainen **haarautumisprosessi**, alkujakaumalla $\pi(k)$ ja jälkikasvun jakaumalla $p(k)$.

- Osoita että $(X_t : t \in \mathbb{N})$ on Markov prosessi, siirtymäytimellä $K(l, m) = P(X_t = m | X_{t-1} = l)$

Olkoon P' toinen todennäköisyys jolla (X_t) on haarautumisprosessi alkujakaumalla $\pi'(k)$ ja jälkikasvun jakaumalla $p'(k)$, siirtymäytimellä $K'(l, m) = P'(X_t = m | X_{t-1} = l)$.

Oletamme

$$\pi(k) = 0 \Longrightarrow \pi'(k) = 0 \quad \text{ja} \quad p(k) = 0 \Longrightarrow p'(k) = 0$$

Olkoon $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

- Laske R-N derivaatta

$$Z_n(\omega) = \frac{dP'\big|_{\mathcal{F}_n}}{dP\big|_{\mathcal{F}_n}}(\omega)$$

4 Stokastinen konvergenssi

Lemma 4.1. *(Ensimmäinen Borel-Cantellin lemma).*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \implies P\big(\limsup_n A_n\big) = P\big(\{\omega : \omega \in A_n \text{ äärettömästi monille } n\text{:lle } \}\big) = 0$$

Lemma 4.2. *(Fatou lemma) Kun $X_n(\omega) \geq 0$ P-melkein varmasti $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$0 \leq E_P\big(\liminf_n X_n\big) \leq \liminf_n E_P\big(X_n\big)$$

Tämä seuraa myös kun $X_n(\omega) \geq Z(\omega)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ P-melkein varmasti, jossa $E_P(Z^-) < +\infty$.

Määritelmä 4.1. *Olkoon $X(\omega), X_n(\omega), n \in \mathbb{N}$ satunnaismuuttujat. Sanotaan että jono (X_n) suppenee stokastisesti (tai todennäköisyyden mielessä) kohti X:aan, (merkintä:$X_n \xrightarrow{P} X$) kun jokaiselle $\varepsilon > 0$*

$$P\big(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}\big) \to 0, \qquad \text{kun } n \to \infty.$$

Stokastinen konvergenssi on heikompi kuin melkein varma konvergenssi:

Lause 4.1. *1. Kun $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ P-melkein varmasti, myös $X_n \xrightarrow{P} X$.*

2. Jos $X_n \xrightarrow{P} X$ (stokastisesti), on olemassa deterministinen alijono $\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}$ jolla

$\lim_{k\to\infty} X_{n(k)}(\omega) = X(\omega)$ P-melkein varmasti,

3. $X_n \xrightarrow{P} X$ jos ja vain jos kaikille alijonoille $\{n(k)\}$ on olemassa alijonon (deterministinen) alijono $\{n(k_l)\}$ jolla $X_{n(k_l)}(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti kun $l \to \infty$.

Tod. Voidaan olettaa että $X(\omega) = 0$, muuten otetaan $\tilde{X}_n(\omega) = X_n(\omega) - X(\omega)$.

1. $X_n(\omega) \to 0$ P-m.v. jos ja vain jos

$$P\bigg(\bigcap_n \bigcup_m \bigcap_{k\geq m} \{\omega : |X_k(\omega)| < n^{-1}\}\bigg) = 1$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad P\bigg(\liminf_k \{\omega : |X_k(\omega)| < n^{-1}\}\bigg) = 1$$

Fatou lemmasta $\forall n$

$$1 = P\bigg(\liminf_k \{\omega : |X_k(\omega)| < n^{-1}\}\bigg) \leq \liminf_k P\bigg(\{\omega : |X_k(\omega)| < n^{-1}\}\bigg) = 1$$

$$\iff 0 = \limsup_k P\bigg(\{\omega : |X_k(\omega)| > n^{-1}\}\bigg) = \lim_k P\bigg(\{\omega : |X_k(\omega)| > n^{-1}\}\bigg)$$

2. Stokastisesta konvergenssista seuraa että on olemassa jono k_n jolla

$$P\Big(\{\omega : |X_l(\omega)| > n^{-1}\}\Big) < 2^{-n}, \quad \forall l \geq k_n$$

Koska

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\{\omega : |X_{k_n}(\omega)| > n^{-1}\}\Big) < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{2} < \infty$$

Borel-Cantelli lemmasta (4.1) seuraa

$$\begin{aligned} 0 &= P\Big(\limsup_n \{\omega : |X_{k_n}(\omega)| > n^{-1}\}\Big) \\ &\geq P\Big(\limsup_n \{\omega : |X_{k_n}(\omega)| > N^{-1}\}\Big) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

josta seuraa

$$\begin{aligned} 1 &= P\Big(\bigcap_N \liminf_n \{\omega : |X_{k_n}(\omega)| \leq N^{-1}\}\Big) \\ \iff \quad & X_{k_n}(\omega) \to 0 \quad P\text{-melkein varmasti.} \end{aligned}$$

3. Olkoon $X(\omega) = 0$ ja tehdään vastaoletus että X_n ei suppenisi stokastisesti kohti nollaan: on olemassa $\varepsilon > 0$ ja jono $n(k) \uparrow \infty$ kun $k \uparrow \infty$ jolla

$$P(|X_{n(k)}| > \varepsilon) \geq \varepsilon > 0 \quad \forall k$$

Tästä tulee ristiriita koska oletetusti olisi olemassa alijono $n(k_l)$ jolla $X_{n(k_l)}(\omega) \to 0$ P-melkein varmasti ja siksi myös stokastisesti, siksi saadaan ristiriita

$$0 < \varepsilon \leq P(|X_{n(k_l)}| > \varepsilon) \to 0 \quad \text{kun } l \to \infty \quad \square$$

Esimerkki 4.1. *Näytämme että stokastinen konvergenssi on aidosti heikompi kuin melkein varmaa konvergenssia: Olkoon $\Omega = (0,1]$ varustettu Borel σ-algebralla $\mathcal{F} = \mathcal{B}((0,1])$ tasaisella todennäköisyydella , siis $P((0,t]) = t$, kun $t \in (0,1]$.*

Määritellään satunnaismuuttujen jono

$$X_{n,k}(\omega) = \mathbf{1}_{(k2^{-n},(k+1)2^{-n}]}(\omega) \quad k = 0, 1, \ldots, (2^n - 1)$$

jossa indeksit voidaan järjestää seuraavaksi: $(n,k) \geq (m,h)$ jos ja vain jos $n > m$ tai $n = m$ ja $k \geq h$.

Seuraa että $\forall \omega \in (0,1]$ kun $(n,k) \to \infty$ järjsteyksen mukaisesti,

$$\begin{aligned} &\lim \inf_{n,k\to\infty} X_{n,k}(\omega) = 0 \neq \lim \sup_{n,k\to\infty} X_{n,k}(\omega) = 1, \ \textit{ja} \\ &P(\{\omega : X_{n,k} > 1/2\}) = P((k2^{-n},(k+1)2^{-n}]) = 2^{-n} \to 0 \ \textit{kun} \ n \to \infty\,. \end{aligned}$$

Tehtävä 4.1. *Etsi jonolle $(X_{n,k}(\omega), n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n)$ aliljono $(X_{n(l),k(l)} : l \in \mathbb{N})$ jolla $X_{n(l),k(l)}(\omega) \to 0$ P-m.v. kun $l \to \infty$.*

Teoreema 4.1. *Stokastinen konvergenssin topologia on metrinen.*

$$\begin{aligned}
&X_n \xrightarrow{P} X \iff d(X, X_n) \to 0, \text{ jossa} \\
&d(X,Y) = d(X-Y,0) = E_P\left(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right) \text{ tai} \\
&d(X,Y) = d(X-Y,0) = E_P\big(1 \wedge |X-Y|\big)
\end{aligned}$$

Olkoon $X_n \xrightarrow{P} X = 0$. $\forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&\frac{|X_n|}{(1+|X_n|)} \le \frac{|X_n|}{(1+|X_n|)} \mathbf{1}(|X_n| > \varepsilon) + \varepsilon \mathbf{1}(|X_n| \le \varepsilon) \le \mathbf{1}(|X_n| > \varepsilon) + \varepsilon, \\
&d(X_n, 0) \le P(|X_n| > \varepsilon) + \varepsilon < 2\varepsilon
\end{aligned}$$

kun n on tarpeeksi suuri.

Toisinpäin, koska kuvaus $f(x) = x/(1+x)$ on aidosti kasvava ($f'(x) = (1+x)^{-2}$), $\forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \mathbf{1}(|X_n| > \varepsilon) \le \frac{|X_n|}{1+|X_n|} \mathbf{1}(|X_n| > \varepsilon) \le \frac{|X_n|}{1+|X_n|} \\
&\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} P(|X_n| > \varepsilon) \le d(|X_n|, 0) \to 0 \text{ kun } n \to \infty
\end{aligned}$$

Näytämme että $d(X,Y)$ on etäisyys, se täyttää kolmion epäyhtälön:

$$\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|} \le \frac{|X-Z| + |Z-Y|}{1+|X-Z| + |Z-Y|} \le \frac{|X-Z|}{1+|X-Z|} + \frac{|Z-Y|}{1+|Z-Y|}$$

kun otetaan odotusarvo seuraa $d(X,Y) \le d(X,Z) + d(Z,Y)$ □

5 Satunnaismuuttujen $L^1(P)$ konvergenssi.

Olkoon $\Omega = (0,1]$ todennäköisyysavaruus joka on varustettu Borel σ-algebralla $\mathcal{F} = \mathcal{B}((0,1])$ ja todennäköisyydella P jolla $P((0,t]) = t$, kun $t \in (0,1]$ (P on tasainen jakauma),

ja satunnaismuuttujen jono

$$X_n(\omega) = n \mathbf{1}_{(0,n^{-1}]}(\omega), \; n \in \mathbb{N}.$$

Koska $X_n(\omega) = 0$ kun $\omega > n^{-1}$ seuraa että $\forall \omega \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0$.

Kuitenkin $E_P(X_n) = nP((0, n^{-1}]) = n\, n^{-1} = 1 \; \forall n$. Väite

$$\lim_n E_P(X_n) = E_P(\lim_n X_n)$$

yleisesti ei pidä paikansa ilman lisää oletuksia.

Määritelmä 5.1. *Merkitään*

$L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{$ $\mathbb{R}$*-arvoset satunnaismuuttujat todennäköisyysavaruudessa* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\}$

jossa tarvittaessa identifioidaan X *ja* Y *kun* $X(\omega) = Y(\omega)$ P*-melkein varmasti.*

Kun $0 < p < \infty$*,määritellään*

$$L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) = \big\{ X \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ jolla } \parallel X \parallel_p < \infty \big\}$$

jossa

$$\parallel X \parallel_p = \big\{ E_P(|X|^p) \big\}^{1/p}$$

Sanomme että $X_n \overset{L^p}{\to} X$ *suppenee* L^p*-normissa kun* $E_P(|X_n - X|^p) \to 0$ *kun* $n \to \infty$.

Määritellään myös

$$\parallel X \parallel_\infty = \ P\text{-esssup } \{|X(\omega)|\} := \inf\big\{ y \in \mathbb{R} : |X(\omega)| \leq y \ P\text{-melkein varmasti } \big\}$$
$$L^\infty = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) = \big\{ X \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ jolla } \parallel X \parallel_\infty < \infty \big\}$$

eli satunnaismuuttuja $X(\omega) \in L^\infty(P)$ *jos ja vain jos on olemassa deterministinen* $K < \infty$ *jolle*

$$|X(\omega)| \leq K \qquad P\text{-melkein varmasti.}$$

eli s.m. on olennaisesti rajoitettu P*-mitan suhteen.*

Osoitamme (myöhemmin) että $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *on Banachin avaruus (eli vektori avaruus jolla on täydellinen normi) kaikille* $0 < p \leq +\infty$*,*

ja $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *on Hilbertin avaruus skalaaritulolla* $\langle X, Y \rangle := E_P(XY)$.

Teoreema 5.1. *Olkoon* $0 < p \leq \infty$*, ja* $\lim_{n\to\infty} \parallel X_n \parallel_p = 0$*. Seuraa että* $X_n \overset{P}{\to} 0$.

Tod. Kun $0 < p < +\infty$, väite seuraa **Chebychevin epäyhtälöstä** : kun $\varepsilon > 0$,

$$\varepsilon^p P(|X_n| > \varepsilon) \leq E_P(|X_n|^p) \to 0 \text{ kun } n \to \infty \ .$$

Kun $p = +\infty$, $\forall K \in \mathbb{N}$ $\exists \bar{n}$ jolla

$$P\big(\{\omega : |X_n(\omega)| \leq K^{-1}\}\big) = 1 \qquad \text{kun } n \geq \bar{n}$$

josta seuraa että

$$P\bigg(\bigcap_K \bigcup_m \bigcap_{n>m} \big\{ \omega : |X_n(\omega)| \leq K^{-1} \big\} \bigg) = P\big(\big\{ \omega : X_n(\omega) \to 0 \big\} \big) = 1$$

siis $X_n \to 0$ P-melkein varmasti ja myös stokastisesti $\square$

Huomautus: Koska

$$|E_P(X) - E_P(Y)| = |E_P(X - Y)| = |E_P((X - Y)^+) - E_P((X - Y)^-)|$$
$$\leq E_P((X - Y)^+) + E_P((X - Y)^-) = E_P(|X - Y|)$$

kun $X_n \overset{L^1(P)}{\to} X$ seuraa $E_P(X_n) \to E_P(X)$.

Käsittelemme ensin L^1-konvergenssia. Olemme huomanneet että ehdoista $X_n(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti ja $X, X_n \in L^1(P)$ ei seuraa että $E(X_n) \to E(X)$, eikä myöskään $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

Siihen tarvitaan sen lisäksi seuraava kompaktisuusehto:

Määritelmä 5.2. *Olkoon satunnaismuuttujen kokoelma $\mathcal{C} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

Satunnaismuuttujen kokoelma $\mathcal{C}$ on **tasaisesti integroituva** *P-mitan suhteen, kun*

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{C}} E_P\big(|X|\mathbf{1}(|X| > K)\big) = \int_{\{\omega:|X(\omega)|>K\}} |X(\omega)|P(d\omega) \longrightarrow 0 \textit{ kun } K \to \infty$$

Lemma 5.1. *Äärellinen satunnaismuuttujen joukko $\mathcal{C} = \{X_1, X_2, \dots, X_M\} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P), M \in \mathbb{N}$ on tasaisesti integroituva, eli $\forall\varepsilon > 0$ on olemassa K jolla*

$$\sup_{1\le m\le M} E_P\Big(|X_m|\mathbf{1}(|X_m| > K)\Big) < \varepsilon$$

Tod. harjoitustehtävä. Vihje: olkoon ensin $M = 1$, $\mathcal{C} = \{X\}$, ja

$$X^{(n)}(\omega) := X(\omega)\mathbf{1}(|X(\omega)| \le K)$$

$|X^{(n)}| \uparrow ? X(\omega|$ ja monotonisen konvergenssi lauseesta seuraa $E_P(|X^{(n)}|) \uparrow E_P(|X|)$ $\square$

Lemma 5.2. $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, jos ja vain jos $\forall\varepsilon > 0$ on olemassa δ, jolla kun $A \in \mathcal{F}$,*

$$P(A) < \delta \Longrightarrow E_P\big(|X|\mathbf{1}_A\big) < \varepsilon$$

Riittavuuden todistus. $\forall\omega$,

$$Y^{(K)}(\omega) := |X(\omega)|\mathbf{1}(|X(\omega)| \le K) \uparrow |X(\omega)|$$

ja lauseesta (5.1) seuraa että

$$E_P(|X|) - E_P(Y^{(K)}) = \int_{\{\omega:|X(\omega)|>K\}} |X(\omega)|P(d\omega) < \varepsilon$$

kun K on tarpeeksi suuri jotta $P(\{\omega : |X(\omega)| > K\}) < \delta$. Tästä seuraa että

$$E_P(|X|) \le E_P(Y^{(K)}) + \varepsilon \le K + \varepsilon < \infty$$

Välttämättömyyden todistus. Tehdään vastaoletus: on olemassa $\varepsilon > 0$ ja tapahtumien jono $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ jolla

$$P(A_n) < 2^{-n} \Longrightarrow E_P\big(|X|\mathbf{1}_{A_n}\big) \ge \varepsilon > 0$$

Olkoon $A = \limsup_n A_n$. Koska

$$\sum_n P(A_n) \le \sum_n 2^{-n} = 1 < \infty$$

seuraa ensimmäisesta Borel Cantelli lemmasta (4.1) että $P(A) = 0$.

Olkoon $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$. Määritelmästä seuraa $A_n \subseteq B_n \downarrow A$, eli

$$|X(\omega)|\mathbf{1}_{A_n}(\omega) \leq |X(\omega)|\mathbf{1}_{B_n}(\omega) \downarrow |X(\omega)|\mathbf{1}_A(\omega) \quad \forall\omega$$

jossa kaikki ylläolevat satunnaismuuttujat ovat integroituvia koska $X \in L^1(P)$. Seuraa väitteen riittavuuden osasta että

$$0 < \varepsilon \leq E_P(|X|\mathbf{1}_{A_n}) \leq E_P(|X|\mathbf{1}_{B_n}) \downarrow E_P(|X|\mathbf{1}_A) = 0$$

koska $P(A) = 0 \quad \square$

Teoreema 5.2. *($L^1(P)$-konvergenssin karakterisaatio) Olkoon satunnaismuuttujat $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $n \in \mathbb{N}$ ja $X \in L^0(\Omega, \mathcal{F})$ Silloin*

$X_n \xrightarrow{P} X$ ja satunnaismuuttujen jono $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ on tasaisesti integroituva,

jos ja vain jos $X_n \xrightarrow{L^1} X \in L^1(P)$, eli

Tod. Kun $X_n \xrightarrow{P} X$ lauseesta (4.1) seuraa että on olemassa deterministinen indeksien alijono $n(k)$ jolle $X_{n(k)}(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti.

Soveltamaalla Fatoun lemmaa (4.2)

$$E_P(|X|) = E_P(\liminf_k |X_{n(k)}|) \leq \liminf_k E_P(|X_{n(k)}|) < \infty$$

koska satunnaismuuttujat $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ovat tasaisesti integroituvia, siis $X \in L^1(P)$.

Olkoon $K \in \mathbb{N}$ ja määritellään kuvaus

$$g^{(K)}(x) = \begin{cases} K & \text{kun } x > K \\ x & \text{kun } |x| \leq K \\ -K & \text{kun } x < -K \end{cases}$$

ja satunnaismuuttujat $X_n^{(K)}(\omega) = g^{(K)}(X_n(\omega))$, $X^{(K)}(\omega) = g^{(K)}(X(\omega))$. Lemmasta (5.1) ja tasaisen integroituvuuden oletuksesta seuraa että $\forall\varepsilon > 0$ on olemassa K jolla

$$E_P(|X - X^{(K)}|) < \varepsilon \quad \text{ja} \quad E_P(|X_n - X_n^{(K)}|) < \varepsilon \quad \forall n,$$

koska

$$\sup_n E_P(|X_n - X_n^{(K)}|) = \sup_n \left\{ \int_{\{\omega:|X_n(\omega)|>K\}} |X(\omega)|P(d\omega) - KP\big(|X_n| > K\big) \right\}$$
$$\leq \sup_n \int_{\{\omega:|X_n(\omega)|>K\}} |X(\omega)|P(d\omega) \longrightarrow 0 \text{ kun } K \to \infty\ .$$

Osoitamme ensin että

$$E_P(|X^{(K)} - X_n^{(K)}|) \to 0 \text{ kun } K \to \infty.$$

Koska $|g^{(K)}(x) - g^{(K)}(y)| < |x - y|$, seuraa $X_n^{(K)} \xrightarrow{P} X^{(K)}$. On olemassa $\bar{n}$ jolla

$$P\big(|X_n^{(K)} - X^{(K)}| > \frac{\varepsilon}{3}\big) < \frac{\varepsilon}{3K} \text{ kun } n \geq \bar{n},$$

josta seuraa

$$E_P(|X_n^{(K)} - X^{(K)}|) = E_P\Big(|X_n^{(K)} - X^{(K)}|\,\mathbf{1}\Big(|X_n^{(K)} - X^{(K)}| > \frac{\varepsilon}{3}\Big)\Big)$$
$$+E_P\Big(|X_n^{(K)} - X^{(K)}|\,\mathbf{1}\Big(|X_n^{(K)} - X^{(K)}| \le \frac{\varepsilon}{3}\Big)\Big)$$
$$\le 2K\,P\Big(|X_n^{(K)} - X^{(K)}| > \frac{\varepsilon}{3}\Big) + \frac{\varepsilon}{3} \le 2K\frac{\varepsilon}{3K} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad \text{kun } n \ge \bar{n}$$

Kolmioepäyhtälön avulla, kun $n \ge \bar{n}$

$$E_P(|X_n - X|) \le E_P(|X_n - X_n^{(K)}|) + E_P(|X_n^{(K)} - X^{(K)}|) + E_P(|X^{(K)} - X|) \le 3\varepsilon$$

Toisinpäin, kun $E_P(|X_n - X|) \to 0$, seuraa (kts. lause 5.1) että $X_n \xrightarrow{P} X$.
Olkoon $\varepsilon > 0$, ja $N \in \mathbb{N}$ jolla

$$E_P(|X - X_n|) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{kun } n \ge N.$$

Lemmasta 5.2 $\exists\, \delta > 0$ jolla $\forall A \in \mathcal{F}$ jolla $P(A) < \delta$ seuraa

$$\max_{n \le N} E_P(|X_n|\mathbf{1_A}) < \varepsilon \qquad \text{ja} \qquad E_P(|X|\mathbf{1_A}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Koska $E_P(|X_n|) \le E_P(|X|) + E_P(|X_n - X|)$ jossa oletetusti $E_P(|X_n - X|) \to 0$, seuraa että on olemassa $K > 0$ jolla

$$\sup_n E_P(|X_n|) < K\delta < \infty \ .$$

Chebychevin epäyhtälöstä seuraa

$$P(|X_n| > K) \le K^{-1} E_P(|X_n|) < \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

Kun $n \ge N$,

$$E_P\big(|X_n|\mathbf{1}(|X_n| > K)\big) \le E_P\big(|X|\mathbf{1}(|X_n| > K)\big) + E(|X - X_n|) < \varepsilon$$

Kun $n \le N$ myös $P(|X_n| > K) < \delta$ ja

$$E_P\big(|X_n|\mathbf{1}(|X_n| > K)\big) < \varepsilon$$

eli tämä on voimassa kaikille $n \in \mathbb{N}$ kun K on tarpeeksi suuri, siis $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ on tasaisesti integroituva $\square$

Osoittaakseen jonon $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tasaisen integroituvuuden, riittää että on olemassa $Y \in L^1(P)$ joka dominoi koko jonon P-melkein varmasti:

Seuraus 5.1. *(Dominoidun konvergenssin lause) Olkoon $X_n \xrightarrow{P} X$ jossa $|X_n(\omega)| \le Y(\omega)$ P-melkein varmasti jollekin $0 \le Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Silloin*

$$|E_P(X_n) - E_P(X)| \le E_P(|X_n - X|) \to 0 \quad \textit{kun } n \to \infty$$

Voidaan osoittaa että tasainen integroituvuus vastaa kompaktisuuden ehtoa $L^1(P)$ avaruudessa varustettuna heikolla topologialla. Tämä ei päde vahvemmalle L^1-normin topologialle.

Teoreema 5.3. *(Dunford-Pettisin lause) Satunnaismuuttujen joukko $\mathcal{C} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on tasaisesti integroituva P-mitan suhteen jos ja vain jos on pre-kompakti $L^1(P)$ avaruuden heikossa topologiassa,*

eli kaikille jonolle $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$ on olemassa indeksien jono $\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}$ ja s.m. $X \in L^1(P)$ joille

$$\lim_{k\to\infty} E_P\big((X_{n(k)} - X)\mathbf{1}_A\big) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Huomautus Tästä ei seura alijonon vahvempi L^1-konvergenssi $E_P(|X_{n(k)} - X|) \to 0$.

On myös hyvää tietää seuraavan tasaisen integroituvuuten karakterisaation

Lause 5.1. *$\mathcal{C} \subseteq L^1(P)$ on tasaisesti integroituva jos ja vain jos*

$$\sup_{X\in\mathcal{C}} E_P(|X|) < \infty \qquad \textit{ja} \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta : P(A) < \delta \implies \sup_{X\in\mathcal{C}} E_P\big(|X|\mathbf{1}_A\big) < \varepsilon$$

Tod. Harjoitustehtävä.

Huomautus 5.1. *Kun $\mathcal{C} \subseteq L^1(P)$ on tasaisesti integroituva, seuraa että $\sup_{X\in\mathcal{C}} E_P(|X|) < \infty$. Kuitenkin pallo $B_1 = \{X \in L^1(P) : E_P(|X|) \leq 1\}$ ei ole tasaisesti integroituva: olkoon $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ jolle $P(A_n) = n^{-1}$, ja olkoon $X_n(\omega) = n\,\mathbf{1}_{A_n}(\omega)$. Selvästi $X_n \in B_1$ $\forall n$, ja kaikille $K > 0$*

$$\sup_n E_P\big(|X_n|\mathbf{1}(|X_n| > K)\big) = \sup_{n>K} E_P(|X_n|) = 1$$

Sovellus: odotusarvon derivointi parametrin suhteen

Lemma 5.3. *Olkoon $X_i : (\Omega_i, \mathcal{F}_i) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $i = 1, 2$ reaaliarvoisia satunnaismuuttujia eri todennäköisyysavaruuksissa. Silloin tulo $X(\omega_1, \omega_2) = X_1(\omega_1)X_2(\omega_2)$ on satunnaismuttuja tuloavaruudessa $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$.*

Tod. Olkoon $X_i(\omega_i) \geq 0$ $\forall \omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2$
(yleisemmin voidaan ensin hajottaa $X_i = (X_i^+ - X_i^-)$). Kun $t \geq 0$

$$\big\{(\omega_1, \omega_2) :\ X_1(\omega_1)X_2(\omega_2) \leq t\big\} = \bigcup_{0<q\in\mathbb{Q}} \left(\left\{ \omega_1 :\ X_1(\omega_1) \leq \frac{t}{q} \right\} \cap \Big\{ \omega_2 :\ X_2(\omega_2) \leq q \Big\} \right) \in (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \quad ,$$

ja Dynkinin lemmasta (**??**) seuraa

$$\big\{(\omega_1, \omega_2) :\ X_1(\omega_1)X_2(\omega_2) \in B\big\} \in (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \square$$

Lause 5.2. *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus jossa $\{Y(t, \omega) : t \in [a, b]\} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on tasaisesti integroituva satunnaismuuttujen joukko, $a < b \in \mathbb{R}$. Oletamme sen lisäksi*

- *Kaikille $\omega \in \Omega$, kuvaus $t \mapsto Y(t, \omega)$ on jatkuva.*

- *Kaikille* $t \in [a,b]$ *kuvaus* $\omega \mapsto Y(t,\omega)$ *on* $\mathcal{F}$*-mitallinen.*

Tästä seuraa

1. *kuvaus* $(t,\omega) \mapsto Y(t,\omega)$ *on* $(\mathcal{B}([a,b]) \otimes \mathcal{F}) \to \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *mitallinen.*
2. *kuvaus* $t \mapsto E_P(Y(t))$ *on jatkuva.*
3. *Olkoon*

$$X(t,\omega) := \int_a^t Y(s,\omega)ds, \ t \in [a,b].$$

Silloin kaikissa $t \in (a,b)$ *on olemassa jatkuva derivaatta*

$$\frac{d}{dt} E_P\big(X(t)\big) = E_P\big(Y(t)\big) = E_P\left(\frac{d}{dt} X(t)\right)$$

Tod. Määritellään tuloavaruudessa $[a,b] \times \Omega$ satunnaismuuttujen jono

$$Y^{(N)}(t,\omega) = \sum_{k=0}^{(N-1)} Y\left(a + (b-a)\frac{k}{N}, \omega\right) \mathbf{1}\left(a + (b-a)\frac{k}{N} < t \le a + (b-a)\frac{(k+1)}{N}\right), \quad N \in \mathbb{N}$$

Lemma (5.3) nojalla seuraa $Y^{(N)}$ on $(\mathcal{B}([a,b]) \otimes \mathcal{F})$-mitallinen, ja jatkuvuudesta seuraa

$$\lim_{N \uparrow \infty} Y^{(N)}(t,\omega) = Y(t,\omega) \quad \forall \omega \ ,$$

siksi $Y(t,\omega)$ on myös $(\mathcal{B}([a,b]) \otimes \mathcal{F})$-mitallinen.

Koska $\lim_{s \to t} Y_s(\omega) = Y_t(\omega)$ ja tasaisen integroituvuuden oletuksesta, seuraa

$$|E_P(Y_t) - E_P(Y_s)| \le E_P|Y_t - Y_s| \to 0 \quad \text{kun} \ \ s \to t.$$

Koska $\{Y_t : t \in [a,b]\}$ on tasaisesti integroituva, seuraa

$$\sup_{t \in [a,b]} E_P\big(|Y_t|\big) < +\infty$$

ja siksi $|Y(t,\omega)| \in L^1\big([a,b] \times \Omega, \mathcal{B}([a,b]) \otimes \mathcal{F}, dt \otimes P(d\omega)\big)$. Fubinin lause soveltuu

$$E_P(X_t) = E_P\left(\int_a^t Y(s)ds\right) = \int_{[a,b]\times\Omega} Y(s,\omega)\, ds \otimes P(d\omega) = \int_a^t E_P(Y(s))ds$$

ja koska kuvaus $t \mapsto E_P(Y(t))$ on jatkuva, analyysin keskiarvon lauseesta

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta \to 0} \Delta^{-1}\big\{E_P(X_{t+\Delta}) - E_P(X_t)\big\} \\ &= \lim_{\Delta \to 0} \Delta^{-1} \int_t^{t+\Delta} E_P(Y(s))ds = E_P(Y(t)) \quad \square \end{aligned}$$

Esimerkki 5.1. *Olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega) \in \mathbb{R}$, jolle on olemassa $a < 0 < b$ jolle $m_X(t) := E_P(\exp(tX)) < \infty, \quad \forall t \in [a, b]$. Olkoon $a < -\varepsilon < 0 < \varepsilon < b$.*

Koska $x\exp(\varepsilon x) \leq \exp(bx)$ kun $x \geq x'$ joka on yhtälön $x'/\log(x') = (b - \varepsilon)$ ratkaisu, seuraa

$$E_P(X^+ \exp(\varepsilon X)) \leq x' \exp(\varepsilon x') + E_P(\exp(bX)) < +\infty$$

Vastaavasti, koska $x\exp(\varepsilon x) \leq \exp(-ax)$ kun $x \geq x''$ joka ratkaisee $x''/\log(x'') = -(a + \varepsilon)$,

$$E_P(X^- \exp(-\varepsilon X)) \leq x'' \exp(\varepsilon x'') + E_P(\exp(-aX)) < +\infty \ .$$

Seuraa

$$|X(\omega)| \exp(tX(\omega)) \leq |X(\omega)| \Big\{ \exp(\varepsilon X(\omega)) + \exp(-\varepsilon X(\omega)) \Big\} \in L^1(P) \quad \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

ja kokoelma

$$\Big\{ X(\omega) \exp(tX(\omega)) : \ t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \Big\} \subseteq L^1(P)$$

on tasaisesti integroituva ,

$$\frac{d}{dt} m_X(t) = E_P\left(\frac{d}{dt} \exp(tX) \right) = E_P\big(X \exp(tX)\big) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

eritysesti kun $t = 0$

$$\frac{d}{dt} m_X(0) = E_P(X) \ .$$

Koska eskponentiaali funktio kasvaa polynoomien nopeammin, $\forall n \in \mathbb{N}$ seuraa satunnaismuuttujien joukon

$$\Big\{ X^n(\omega) \exp(tX(\omega)) : \ t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \Big\} \subseteq L^1(P)$$

tasainen integroituvuus, ja

$$\frac{d^n}{dt^n} m_X(t) = E_P\left(\frac{d^n}{dt^n} \exp(tX) \right) = E_P\big(X^n \exp(tX)\big) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

eritysesti kun $t = 0$

$$\frac{d^n m_X}{dt^n}(0) = E_P\big(X^n\big) \ .$$

Kuvaus $m_X(t) = E_P\big(\exp(tX)\big)$ kutsutaan momentti-generoiva funktioksi.

Esimerkki 5.2. *(Esscherin muunnos.)*

Olkoon $\Theta = \{m_X(t) = E_P(\exp(tX)) < \infty\}$. Kun $t \in \Theta$ määritellään mitanvaihtokaavan kautta todennäköisyysmitta

$$P^{(t)}(A) = \frac{E_P\big(\exp(tX)\mathbf{1}_A\big)}{m_X(t)}, \quad \forall A \in \mathcal{F} \ .$$

Kun on olemassa $\varepsilon > 0$ *jolle* $[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \subseteq \Theta$, *seuraa*

$$E_{P^{(t)}}(X^n) = \frac{E_P\big(X^n \exp(tX)\big)}{m_X(t)} = \frac{d^n m_X}{dx^n}(t)\,\frac{1}{m_X(t)}, \text{ erityisesti}$$
$$E_{P^{(t)}}(X) = \frac{d}{dt}\log(m_X(t))$$

Tod. Kuten tapauksessa $t = 0$.

6 $L^p(\Omega)$ avaruudet

6.1 Epäyhtälöt

Määritelmä 6.1. *Kuvaus* $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *on konveksi kun*

$$g\big(px + (1-p)y\big) \quad \le \quad pg(x) + (1-p)g(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ p \in [0,1]$$

Lause 6.1. *Olkoon* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konveksi funktio. Silloin* g *on jatkuva, ja jokaisessa pisteessä on olemassa derivaatat oikealta ja vasemmalta*

$$\nabla g^-(t) = \lim_{r \uparrow t} \frac{g(r) - g(t)}{r - t} \le \nabla g^+(t) = \lim_{r \downarrow t} \frac{g(r) - g(t)}{r - t}$$

ja $\nabla g^\pm(s) \le \nabla g^\pm(t)$ *kun* $s \le t$.

Tod. kun $t \le s \le r$,

$$\frac{g(s) - g(t)}{s - t} \le \frac{g(r) - g(t)}{r - t}$$

koska kun $p = (r-s)/(r-t) \in [0,1]$, $s = pt + (1-p)r$, konveksisuudesta

$$g(s) - g(r) \le \big(g(t) - g(r)\big)\,p$$

Tästä seuraa että jokaiselle t, jono

$$(g(t + n^{-1}) - g(t))n \quad n \in \mathbb{N}$$

ei kasva ja siksi monotoninen raja on olemassa. Koska oikea ja vasen derivaatat $\nabla^\pm g(t)$ ovat olemassa, $g(t)$ on jatkuva jokaisessa $t \in \mathbb{R}$. Konveksisuudesta seuraa myös

$$\frac{g(s) - g(t)}{s - t} \le \frac{g(r) - g(s)}{r - s}$$

kun $t \le s \le r$, siksi $\nabla^+ g(t) \le \nabla^- g(r)$ kun $t < r$ □

Huomautus 6.1. *Koska derivaatat ovat ei-väheneviä,*

1. *Joukko*

$$D := \Big\{ t : \ \nabla^+ g(t) > \nabla^- g(t) \Big\}$$

on korkeintaan numeroituva.

2. jokaiselle $t \in \mathbb{R}$, $\delta \in [\nabla^- g(t), \nabla^+ g(t)]$

$$g(s) = g(t) + \int_t^s \nabla^{\pm} g(r) dr \geq g(t) + (s-t)\delta \qquad \forall s$$

Seuraa myös että g on konveksi jos ja vain jos on absoluttisesti jatkuva Lebesgue mitan suhteen ja Radon-Nikodymin-derivaatta $\frac{dg}{dx}(x)$ on ei-vähenevä.

Lause 6.2. *(Jensenin epäyhtälö) Olkoon $X(\omega) \in \mathbb{R}$ satunnaismuuttuja jolla $E_P(|X|) < \infty$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksikuvaus. Silloin*

$$g\big(E_P(X)\big) \quad \leq \quad E_P\big(g(X)\big)$$

R. Koska g on konveksi, sen oikea ja vasen derivaatat pisteessa $\mu = E_P(X)$ ovat olemassa. Kaikille $\delta \in [\nabla^- g(\mu), \nabla^+ g(\mu)]$

$$g(X(\omega)) \geq g(E_P(X)) + \delta\big\{X(\omega) - E_P(X(\omega))\big\}$$

ja väite seuraa ottaamalla odotusarvon $\Box$

Huomautus Huomataan että Jensenin epäyhtälö on voimassa myös silloin kun integroidaan positiivisen mitan $\nu(dx)$ suhteen vaikka olisi $\nu(\mathbb{R}) = +\infty$. Siis kun g on konveksi,

$$\int_{\mathbb{R}} |x| \nu(dx) < \infty \Longrightarrow g\bigg(\int_{\mathbb{R}} x \nu(dx)\bigg) \leq \int_{\mathbb{R}} g(x)\nu(dx)$$

mutta on mahdollista että

$$\int_{\mathbb{R}} |x|\nu(dx) = \infty \text{ ja } \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\nu(dx) < \infty$$

Lemma 6.1. *Kun $1 \leq p < r$, $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \supseteq L^r(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

Tod. Olkoon $X \in L^r(P)$.
Kun $r = \infty$, $|X(\omega)|^p \leq \| X \|_\infty^p$ P-melkein varmasti ja väite seuraa.
Kun $r < \infty$, olkoon

$$Y_n(\omega) = n \wedge |X(\omega)|^p \in L^{r/p}(P) \ .$$

Koska $0 \leq Y_n(\omega) \leq n$ seuraa $Y_n(\omega) \in L^1(P)$.
Kuvaus $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ jolla $x \mapsto g(x) = x^{r/p}$ on konveksi. Jensenin epäyhtälöstä seuraa:

$$E_P(Y_n^{r/p}) \geq E_P(Y_n)^{r/p}$$

Monotonisen konvergenssi lauseesta, koska $0 \leq Y_n(\omega) \uparrow |X(\omega)|^p \ \forall\omega$ seuraa

$$E_P(|X|^r) \geq E_P(|X|^p)^{r/p}.$$

Emme olisi voineet soveltaa Jensenin epäyhtälöä suoraan satunnaismuuttujalle $|X(\omega)|^p$ koska apriori oli epäselvää kuuluuko $L^{r/p}(P)$ avaruuteen. Siksi käytettiin kätkettyja muuttujia $\{Y_n\}$ $\Box$

Huomautus 6.2. *Tässä on olemmaista että P on todennäköisyysmitta tai äärellinen mitta, koska silloin kun $\nu(\Omega) = \infty$ $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \nu) \not\subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$, ja pelkään kätkäisemällä ei saadan integroituvia satunnaismuuttujia.*

Väite ei päde $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ avaruuksille silloin kun $\nu(\Omega) = \infty$.

Kun $\nu(\Omega) < \infty$ määritellään $P(A) = \nu(A)/\nu(\Omega)$ josta seuraa

$$\left\{ \int_\Omega |X(\omega)|^p \nu(d\omega) \right\}^{1/p} \leq \nu(\Omega)^{(r-p)/(rp)} \left\{ \int_\Omega |X(\omega)|^r \nu(d\omega) \right\}^{1/r}$$

siis $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \nu) \supseteq L^r(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ myös tässä tapauksessa. Tämä epäyhtälö ei kerro meille mitään kun $\nu(\Omega) = \infty$.

Lause 6.3. *(Cauchy Schwartzin epäyhtälö , $p = 2$)*

Olkoon $X(\omega), Y(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ silloin

1. *tulo $(X(\omega)Y(\omega)) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja*

   $$\| XY \|_1 = E_P(|XY|) \leq \sqrt{E_P(X^2)}\sqrt{E_P(Y^2)} = \| X \|_2 \| Y \|_2$$

   jossa yhtäsuuruisuus on voimassa jos ja vain jos $Y(\omega) = cX(\omega)$ P m.v. jollekin $c \in \mathbb{R}$.

   Kun $E_P(XY) = 0$ sanomme että satunnaismuuttujat ovat ortogonaaliisia.

2. *Kolmion epäyhtälö on voimassa:*

   $$\| X + Y \|_2 \leq \| X \|_2 + \| Y \|_2$$

1. Tod. Olkoon

   $$X_n(\omega) = n \wedge |X(\omega)|, \quad Y_n(\omega) = n \wedge |Y(\omega)|$$

   koska $0 \leq X_n(\omega), Y_n(\omega) \leq n$ $\forall \omega$, seuraa $(X_n(\omega)Y_n(\omega)) \in L^1(P)$.

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \Big(tX_n(\omega) + Y_n(\omega) \Big)^2 = t^2 X_n(\omega)^2 + Y_n(\omega)^2 + 2tX_n(\omega)Y_n(\omega)$$

   Ottaamalla odotusarvoa (joka on olemassa ainakin katkaistetuille satunnaismuuttujille), seuraa että toisen asteen yhtälöllä

   $$t^2 E_P(X_n)^2 + 2tE_P(X_nY_n) + E(Y_n^2) = 0$$

   on korkeintaan yksi reaaliratkaisu, josta seuraa

   $$E_P(X_nY_n)^2 - E(X_n^2)E(Y_n^2) \leq 0$$

   Koska

   $$0 \leq |X_n(\omega)Y_n(\omega)| \uparrow |X(\omega)Y(\omega)| \quad \forall \omega$$

   seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta

   $$E_P(|XY|)^2 - E(X^2)E(Y^2) \leq 0$$

2. Tod.

$$E_P((X+Y)^2) = E_P(X^2) + E_P(Y^2) + 2E_P(XY)$$
$$\leq E_P(X^2) + E_P(Y^2) + 2E_P(|XY|)$$
$$\leq E_P(X^2) + E_P(Y^2) + 2\sqrt{E_P(X^2)}\sqrt{E_P(Y^2)} = \left\{ \sqrt{E_P(X^2)} + \sqrt{E_P(Y^2)} \right\}^2 \quad \square$$

Lause 6.4. *Seuraavat identiteettit ovat voimassa $L^2(P)$ avaruudessa*

- *Kun $X, Y \in L^2(P)$,*

$$\| X+Y \|_2^2 + \| X-Y \|_2^2 = 2 \| X \|_2^2 + 2 \| Y \|_2^2 \qquad \textit{(Suunnikkaan identiteetti)}$$

-

$$E_P(XY) = \frac{1}{4}\big(\| X+Y \|_2^2 - \| X-Y \|_2^2 \big) \qquad \textit{(Polarisaation identiteetti)}$$

Todistus: harjoitustehtävä.

Huomautus Voidaan myös osoittaa että kun normi $\| x \|$ toteuttaa suunnikkaan identiteetti, on olemassa skalaari tulo (x, y) jolla $\| x \|^2 = (x, x)$.

Jensenin epäyhtälön avulla Cauchy-Schwarz epäyhtälö yleistyy $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ avaruuksiin, jossa $1 < p < \infty$ ja μ on yleinen positiivinen mitta.

Huomataan myös että kun $X \in L^1(\mu), Y \in L^\infty(\mu)$, koska $|X(\omega)Y(\omega)| \leq |X(\omega)| \| Y \|_\infty$ seuraa suoraan että tulo $(XY) \in L^1(\mu)$.

Lause 6.5. *Olkoon $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ja $Y \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $1 \leq p <= \infty$ jossa $q = p/(p-1)$ on konjugattieksponentti joka toteuttaa $(q^{-1} + p^{-1}) = 1$. Silloin*

$$\int_\Omega |X(\omega)Y(\omega)|\mu(d\omega) \leq \left\{ \int_\Omega |X(\omega)|^p \mu(d\omega) \right\}^{1/p} \left\{ \int_\Omega |X(\omega)|^q \mu(d\omega) \right\}^{1/q}$$
$$= \| X \|_{L^p(\mu)} \| Y \|_{L^p(\mu)}$$

(Hölderin epäyhtälö).

Kun $X, Y \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $1 \leq P \leq \infty$

$$\| X+Y \|_{L^p(\mu)} \leq \| X \|_{L^p(\mu)} + \| Y \|_{L^p(\mu)}$$

(Minkowskin epäyhtälö).

Tod. (Hölder) Olkoon $1 < p < \infty$. Tietenkin voidaan olettaa $X(\omega) \geq 0$ $Y(\omega) \geq 0$ ja $E_P(|X|^p) > 0$ (muuten $X(\omega) = 0$ P-m.v. ja epäyhtälö seuraa.

Määritellään satunnaismuuttuja

$$\widetilde{Y}(\omega) := \frac{Y(\omega)}{X(\omega)^{p-1}} \mathbf{1}(X(\omega) > 0) \geq 0$$

ja todennäköisyysmitta

$$\widetilde{P}(d\omega) = \frac{X(\omega)^p}{\| X \|_{L^p(\mu)}} \mu(d\omega)$$

Jensenin epäyhtälöstä

$$E_{\widetilde{P}}(\widetilde{Y})^q \le E_{\widetilde{P}}(\widetilde{Y}^q)$$

kaikille $q \ge 1$ erityisesti kun $q = p/(p-1)$

$$\begin{aligned}
&\left\{ \int_\Omega \frac{Y(\omega)}{X(\omega)^{p-1}} \mathbf{1}(X(\omega) > 0) \; \frac{X(\omega)^p}{\| X \|^p_{L^p(\mu)}} \mu(d\omega) \right\}^q \\
&\le \int_\Omega \left\{ \frac{Y(\omega)}{X(\omega)^{p-1}} \mathbf{1}(X(\omega) > 0) \right\}^q \frac{X(\omega)^p}{\| X \|^p_{L^p(\mu)}} \mu(d\omega) \\
&\Longleftrightarrow \| X \|^{-pq}_{L^p(\mu)} \left\{ \int_\Omega Y(\omega) X(\omega) \mu(d\omega) \right\}^q \\
&\le \| X \|^{-p}_{L^p(\mu)} \int_\Omega Y(\omega)^q X(\omega)^{(q(p-1)-p)} \mu(d\omega)
\end{aligned}$$

jossa $q(p-1) - p = 0$. Seuraa

$$\int_\Omega Y(\omega) X(\omega) \mu(d\omega) \le \left\{ \int_\Omega Y(\omega)^q \mu(d\omega) \right\}^{1/q} \| X \|^{(1-1/q)p}_{L^p(\mu)}$$

jossa $(1 - 1/q)p = 1$.

Tod. (Minkowski) Huomataan ensin että $\forall x, y \ge 0$,

$$(x+y)^p \le \big(2 \max(x,y)\big)^p \le 2^p(x^p + y^p).$$

Siksi $X, Y \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, myös $(X+Y) \in L^p(\mu)$.
Seuraa Hölderin epäyhtälöstä

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |X+Y|^p d\mu \le \int_\Omega |X||X+Y|^{p-1} d\mu + \int_\Omega |Y||X+Y|^{p-1} d\mu \\
&\le \big(\| X \|_{L^p(\mu)} + \| Y \|_{L^p(\mu))} \big) \; \| \; |X+Y|^{p-1} \; \|_{L^q(\mu)} \\
&= \big(\| X \|_{L^p(\mu)} + \| Y \|_{L^p(\mu)} \big) \; (\| X+Y \|_{L^p(\mu)})^{p/q}
\end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$\| X + Y \|^{(1-1/q)p}_{L^p(\mu)} \quad \le \quad \| X \|_{L^p(\mu)} + \| Y \|_{L^p(\mu)}$$

jossa $(1 - 1/q)p = 1 \quad \Box$

Lause 6.6. *$\forall 1 \le p \le \infty$, $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on* **täydellinen** *:*

jos $\{X_n(\omega)\} \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on Cauchy jono,
eli $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon$ jolle $\| X_n - X_m \|_{L^p(P)} < \varepsilon$ kun $n, m \ge N_\varepsilon$,
on olemassa $X(\omega) \in L^p(P)$ jolle $\lim_{n \uparrow \infty} \| X_n - X \|_{L^p(P)}$

Tod. Tapaus jossa $p = \infty$ jää harjoitustehtäväksi.
Olkoon $p < \infty$ ja $\{X_n\} \subseteq L^p$ Cauchy jono. On olemassa jono (k_n) jolla

$$\| X_r - X_s \|_p \le 2^{-n} \quad \forall r, s \ge k_n$$

Kun $p \geq 1$ ja $r, s \geq k_n$ Jensenin epäyhtälöstä

$$E_P(|X_r - X_s|) \leq E_P(|X_r - X_s|^p)^{1/p} \leq 2^{-n}$$

Siksi asettamalla $X_{k_0}(\omega) = 0$,

$$X_{k_n}(\omega) = \sum_{m=1}^{n} (X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega))$$

on teleskoppisen summan esitys jossa

$$E_P\left(\sum_{m=1}^{\infty} |X_{k_m} - X_{k_{m-1}}|\right) < \infty$$

ja siksi P-melkein varmasti

$$\sum_{m=1}^{\infty} |X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega)| < \infty$$

ja sarja

$$\sum_{m=1}^{\infty} \big(X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega)\big)$$

suppenee absoluttisesti.

Jotta $X(\omega)$ olisi määritelty kaikille ω:lle, olkoon

$$X(\omega) = \lim\sup_{n\to\infty} X_{k_n}(\omega).$$

Seuraa että $X(\omega)$ on satunnaismuuttuja ja $X_{k_n}(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti.

Kun $r > k_n$ ja $\forall t > n$

$$E_P(|X_r - X_{k_t}|^p) \leq 2^{-np}$$

Fatou lemmasta, koska $0 \leq |X_r(\omega) - X_{k_t}(\omega)|^p$,

$$E_P(|X_r - X|^p) = E_P(\liminf_t |X_r - X_{k_t}|^p) \leq \liminf_t E_P(|X_r - X_{k_t}|^p) \leq 2^{-np}$$

Tästä seuraa $X \in L^p$ ja $X_r \stackrel{L^p}{\to} X$ kun $r \to \infty$ $\square$

7 Funktionaalianalyysin peruskäsitteiden pikasanasto

1. Topologinen avaruus: $(E, \mathcal{T})$ jossa topologia $\mathcal{T} \subseteq 2^E$ on kaikkien avointen joukkojen kokoelma. Topologia an suljettu äärellisten leikkausten suhteen ja mielivaltaisten yhdistelmien suhteen. Avoimen joukon komplementti sanotaan suljetuksi.

   Olkoon $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$. Sanotaan että $x_n \to x$ topologiassa $\mathcal{T}$ jos

   $\forall U \in \mathcal{T}$ jolle $x \in U$, $\exists\, n_U$ jolle $x_n \in U$ $\forall n \geq n_U$.

2. $d : E \times E \to [0, +\infty]$ on metriikka jos
   - $d(e, e') = 0$ jos ja vain jos $e = e'$
   - $d(e, e') = d(e', e)$ (symmetrisyys)
   - $d(e, e'') \le d(e, e') + d(e', e'')$ (kolmion epäyhtälö)

3. Topologinen avaruus $(E, \mathcal{T})$ on metrinen jos on olemassa metriikka (etäisyys) $d : E \times E \to [0, +\infty]$, jonka suhteen avoimet pallot generoivat topologian $\mathcal{T}$:n, eli:

   $B(e, r) = \{e' : d(e, e') < r\} \in \mathcal{T} \ \forall \ e \in E, r > 0$

   ja kaikille $x \in U$, $x \in E, U \in \mathcal{T}$ on olemassa $r > 0$ jolle $x \in B(e, r) \subseteq U$.

   Metrisessa avaruudessa, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ on *Cauchy jono* kun $\forall \varepsilon > 0$ on olemassa n_ε jolle $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ kun $n, m \ge n_\varepsilon$.

   Sanotaan että metrinen avaruus (E, d) on *täydellinen* jos kaikille Cauchy jonoille $\{x_n\}$ on olemassa rajaarvo $x \in E$.

4. Olkoon E reaali-vektoriavaruus, eli kun $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$, myös $\lambda x \in E$, $(x + y) \in E$.

   Kuvaus $\| \cdot \| : E \to [0, +\infty)$ on *normi* kun

   i) $\| x \| = 0 \in \mathbb{R} \iff x = \mathbf{0} \in E$ ii) $\| \lambda x \| = |\lambda| \ \| x \|$

   iii) $\| x + y \| \le \| x \| + \| y \|$.

   Kaikki normatut vektoriavaruudet ovat metriset, metriikalla $d(x, y) := \| x - y \|$, joka generoi normi-konvergenssin topologian. Samalla avaruudella voi olla useita käyttökelpoisia topologioita.

5. esi-Hilbertin avaruus on normi-avaruus jossa normi on peräisin skalaaritulosta $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jossa $\| x \|^2 := \langle x, x \rangle$. Reaaliarvoinen skalaaritulo on symmetrinen $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

   bilineaarinen $\langle \lambda x + \lambda' x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda' \langle x', y \rangle$, ja positiivinen $\langle x, x \rangle \ge 0$, jolla $\langle x, x \rangle = 0 \iff 0$.

6. Täydellinen normiavaruus on Banachin avaruus ja täydellinen esi-Hilbertin avaruus on Hilbertin avaruus.

8 Projektio $L^2(P)$ avaruudessa

Lause 8.1. *Olkoon $H \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ aliavaruus joka on* **suljettu**, *eli jos $\{X_n\} \subseteq H$ ja on olemassa $X \in L^2(P)$ jolla $\| X_n - X \|_{L^2(P)} \to 0$, seuraa että $X \in L^2(P)$.*

Kaikille $X(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on olemassa ortogonaalinen projektio H-aliavaruuteen $Y(\omega) = (\Pi_H X)(\omega) \in H$ jolla

- $$E_P((X - Y)^2) = \Delta := \inf_{W \in H} E_P((X - W)^2)$$

- $E_P((X - Y)W) = 0 \ \forall W \in H$

Projektio Y on P-melkein varmasti yksikäsitteinen.

Huomautus 8.1. *Muistetaan että euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^d$ on määritelty vektoreiden skalaari tulo*

$$\langle X, Y\rangle_{\mathbb{R}^d} = \sum_{\omega=1}^{d} X(\omega)Y(\omega) = d\cdot\sum_{\omega=1}^{d} X(\omega)Y(\omega)P(\{\omega\}) = E_P(XY)d$$

jossa $P(\omega) = 1/d$ on tasainen todennäköisyys äärellisessä avaruudessa $\Omega = \{1,\dots,d\}$. Sanomme että vektorit $X, Y \in \mathbb{R}^d$ ovat kohtisuoria (merkintä $X \perp_{\mathbb{R}^d} Y$), kun $\langle X, Y\rangle_{\mathbb{R}^d} = 0$.

Tämä geometrinen käsite yleistyy abstraktissa todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$ kun varustetaan $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ skalaaritulolla

$$\langle X, Y\rangle_{L^2(P)} = E_P(XY) = \int_\Omega X(\omega)Y(\omega)P(d\omega)$$

ja tulkitaan satunnais-muuttujat $(X(\omega) : \omega \in \Omega)$ ääretönulotteisinä vektoreina. Satunnais-muuttujat $X, Y \in L^2(P)$ ovat kohtisuoria (merkintä $X \perp_P Y$), kun $E_P(XY) = 0$.

Tod. Koska $0 \in H$, $\Delta \le E_P(|X|^2) < \infty$, ja on olemassa jono $(Y_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq H$ jolla $\| X - Y_n \|_2 \to \Delta$.

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $\bar{n}$ jolla kun $n \ge \bar{n}$

$$\Delta \le E_P((X - Y_n)^2) < \Delta + \varepsilon$$

Suunnikkaan yhtälöstä seuraa

$$2 \| (Y_m - Y_n)/2 \|_2^2 = \| X - Y_m \|_2^2 + \| X - Y_n \|_2^2 - 2 \| X - (Y_m - Y_n)/2 \|_2^2$$

jossa $(Y_n - Y_m)/2 \in H$, ja seuraa

$$\| X - (Y_n - Y_m)/2 \| \ge \Delta$$

Kun $n, m \ge \bar{n}$

$$2 \| (Y_m - Y_n)/2 \|_2^2 \le 2\varepsilon$$

Siksi $(Y_n) \subseteq H$ on Cauchy jono $L^2(P)$:ssa. Koska $L^2(P)$ on täydellinen on olemassa $Y \in L^2(P)$ jolla $Y_n \stackrel{L^2}{\to} Y$, ja koska H on suljettu aliavaruus seuraa $Y \in H$.

Olkoon $W \in H \setminus \{0\}$. $\forall t \in \mathbb{R}$, $(Y + tW) \in H$

$$\| X - Y \|_2^2 \le \| X - Y - tW \|_2^2 = \| (X - Y) \|_2^2 + t^2 \| W \|_2^2 - 2tE_P((X - Y)W)$$
$$\iff t^2 \| W \|_2^2 - 2tE_P((X - Y)W) \ge 0 \quad \forall t \ge 0$$

josta seuraa $E_P((X - Y)W) = 0$.

Jos $\widetilde{Y}(\omega) \in H$ on myös projektio, ottamalla $W = (Y - \widetilde{Y}) \in H$

$$0 = E_P(XW) - E_P(XW) = E_P(YW) - E_P(\widetilde{Y}W) = E_P((Y - \widetilde{Y})W) = E_P((Y - \widetilde{Y})^2)$$

josta seuraa $Y(\omega) = \widetilde{Y}(\omega)$ P-m.v. $\square$

Lemma 8.1. *L^2-projektio on lineaarinen operaattori: kun $X, Z \in L^2(P)$,$a \in \mathbb{R}$ ja H on suljettu aliavaruus,*

$$\Pi_H(X + Z) = \Pi_H X + \Pi_H Z, \quad \Pi_H(aX) = a\Pi_H(X)$$

9 Ehdollinen odotusarvo

Olkoon $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali-σ-algebra.

Silloin $L^p(\Omega, \mathcal{G}, P) \subseteq L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\forall 0 \le p \le \infty$, ja kun $p > 0$, $L^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$ on suljettu aliavaruus.

Tod. Olkoon $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$ ja $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ joilla $E_P(|X_n - X|^p) \to 0$, Seuraa että $X \implies X_n \xrightarrow{P} X$ ja on olemassa alijono jolla $\{n_k\} : X_{n_k}(\omega) \to X(\omega)$ P m.v. . Olkoon $\widetilde{X}(\omega) := \liminf_k X_{n_k}(\omega) \in L^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Seuraa että $X_n \xrightarrow{L^P} \widetilde{X}$ ja siksi $X(\omega) = \widetilde{X}(\omega)$ P-m.v.

Kun $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja $H = L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ seuraa projektio lauseesta (8.1) että on olemassa ortogonaalinen projektio

$$Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega) := \big(\Pi_{L^2(\Omega,\mathcal{G},P)} X\big)(\omega)$$

joka kutsutaan *ehdolliseksi odotusarvoksi* jolla

- $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$
- $E_P(XW) = E_P(YW) \quad \forall W \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$

Lemma 9.1. *Ehdollinen odotusarvo on positiivinen operaattori:*
Olkoon $0 \le X(\omega) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *ali-σ-algebra. Silloin*

$$Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega) \ge 0 \qquad P\text{-m.v.}$$

Tod. Koska $L^\infty(P) \subseteq L^2(P)$ ehdollinen odotusarvo $Y(\omega)$ on olemassa L^2-projektiona. Olkoon $A = \{\omega : Y(\omega) < 0\} \in \mathcal{G}$. Koska $\mathbf{1}_A(\omega) \in L^\infty(P) \subseteq L^2(P)$,

$$0 \le E_P(X\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}(Y < 0)) = -E_P(Y^-) \le 0$$

ja väite seuraa.

Ehdollisen odotusarvon määritelmä laajennetaan $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avaruuteen:

Teoreema 9.1. *(Kolmogorovin määritelmä) Kun* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *ja* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *on ali-σ-algebra, on olemassa ehdollinen odotusarvo* $Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ *jolla* $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ *ja*

$$E_P(X\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Ehdollinen odotusarvo on P-m.v. yksikäsitteinen.

Tod. Voidaan olettaa että $X(\omega) \ge 0$ $\forall \omega$, muuten käytämme ensin hajotelmaa $X(\omega) = X(\omega)^+ - X(\omega)^-$ ja sitten määrittelemme

$$E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) = E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) - E_P(X^-|\mathcal{G})(\omega)$$

Olkoon $0 \le X_n(\omega) = X(\omega) \wedge n \uparrow X(\omega)$ kun $n \uparrow \infty$. Koska $X_n \in L^\infty$ seuraa että $X_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja projektio lauseesta seuraa että on olemassa $Y_n \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ jolla

$$E_P(X_n\mathbf{1}_A) = E_P(Y_n\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Seuraa lemmasta (9.1) että $Y_n(\omega) \geq 0$ P-m.v. Kun $n \geq m$ $(X_n(\omega) - X_m(\omega)) \geq 0$ josta seuraa

$$(Y_n(\omega) - Y_m(\omega)) = E_P(X_n|\mathcal{G})(\omega) - E_P(X_m|\mathcal{G})(\omega) = E_P(X_n - X_m|\mathcal{G})(\omega) \geq 0 \quad P\text{-m.v.}$$

Olkoon $Y(\omega) = \limsup_n Y_n(\omega)$. Seuraa että $Y_n(\omega) \uparrow Y(\omega)$ P-m.v. ja monotonisen konvergenssin lauseesta, $\forall A \in \mathcal{G}$

$$E_P(X\mathbf{1}_A) = \lim_{n\uparrow\infty} E_P(X_n\mathbf{1}_A) = \lim_{n\uparrow\infty} E_P(Y_n\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}_A)$$

Jos $\widetilde{Y}(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ toteuttaa Kolmogorovin määritelmää, koska $A = \{\omega : Y(\omega) > \widetilde{Y}(\omega)\} \in \mathcal{G}$,

$$0 \leq E_P((Y - \widetilde{Y})\mathbf{1}_A) = E_P(X\mathbf{1}_A) - E_P(X\mathbf{1}_A) = 0$$

seuraa että $Y(\omega) \leq \widetilde{Y}(\omega)$ P-m.v., samoin seuraa että $Y(\omega) \geq \widetilde{Y}(\omega)$ ja siksi $Y(\omega) = \widetilde{Y}(\omega)$ P-m.v.

Tehtävä 9.1. *Osoita että (9.1) pätee jos ja vain jos*

$$E_P(XW) = E_P(YW) \quad \forall W \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

Tehtävä 9.2. *Olkoon $\mathcal{G} = \sigma(A_1, \dots, A_n) \subseteq \mathcal{F}$ äärellisesti generoitu ali σ-algebra, jossa $\{A_1, \dots, A_n\}$ on Ω:n $\mathcal{F}$-mitallinen ositus, $A_i \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ kun $i \neq j$.*

Olkoon $X(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Silloin

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{E_P(X\mathbf{1}_{A_i})}{P(A_i)} \mathbf{1}_{A_i}(\omega) := \sum_{i=1}^n E_P(X|A_i)\mathbf{1}_{A_i}(\omega) \tag{9.1}$$

jossa $E_P(X|A) = E_P(X\mathbf{1}_A)/P(A)$ on elementaarinen ehdollinen odotusarvo, joka saa mielivaltainen arvo (esimerkiksi 0) silloin kun $P(A) = 0$. Osoita että (9.1) toteuttaa Kolmogorovin ehdollilsen odotuarvon määritelmän.

Huom: Kolmogorovin ehdollinen odotusarvo σ-algebran ehdolla $E_P(X|\mathcal{G})(\omega)$ on satunnaismuuttuja, kun elementaarinen odotusarvo tapahtuman ehdolla $E_P(X|A)$ on vakio joka on hyvin määritelty vain silloin kun $P(A) > 0$.

10 Ehdollinen odotusarvo Radon-Nykodim derivaattana

Olkoon $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Määritellään merkkinen mitta

$$\mu_X(A) = E_P(X\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Huomataan että $\mu_X(A) = 0$ silloin kun $A \in \mathcal{F}$ ja $P(A) = 0$, eli $\mu \ll P$ σ-algebrassa $\mathcal{F}$, ja $X(\omega) = \frac{d\mu_X}{dP}(\omega)$ on vastaava Radon-Nikodymin derivaatta.

Olkoon $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali σ-algebra. Erityisesti $\mu \ll P$ σ-algebrassa $\mathcal{G}$. Radon-Nikodymin lauseesta seuraa että on olemassa R-N derivaatta

$$Y(\omega) := \frac{d\mu_X|_{\mathcal{G}}}{dP|_{\mathcal{G}}}(\omega)$$

jossa $Y(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ joka toteuttaa mitanvaihtokaavaa

$$E_P(X\mathbf{1}_A) = \mu_X(A) = E_P(Y\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Kolmogorovin määritelmästä seuraa että $Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega)$.

Siis ehdollisen odotusarvon olemassa olo seuraa R-N lauseesta. Kuitenkin, koska emme ole vielä todistaneet R-N lauseetta käytimme L^2-projektiota.

11 Mitä voidaan sanoa kun $E_P(|X|) = \infty$?

Olkoon $0 \le X(\omega) \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mutta $E_P(X) = \infty$. Myös tässä tapauksessa monotonisen konvergenssilauseen kautta seuraa että on olemassa ehdollinen odotusarvo $Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega) \in [0, +\infty]$ joka on $\mathcal{G}$-mitallinen joka totetuttaa $\forall A \in \mathcal{G}$.

$$E_P(X\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}_A) \in [0, +\infty]$$

Toki $Y(\omega)$ voi saada myös arvoa $+\infty$, joka tapauksessa $E_P(Y) = E_P(X) = \infty$.

Yleisemmin olkoon $X(\omega) = (X(\omega)^+ - X(\omega)^-)$, jossa $E_P(|X|) = \infty$. Silloin ehdollinen odotusarvo

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) := E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) - E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) \in [-\infty, +\infty]$$

on hyvin määritelty vain joukon

$$U := \big\{\omega : E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) = E_P(X^-|\mathcal{G})(\omega) = +\infty\big\}$$

ulkopuolella. Kun käy hyvin joskus $P(U) = 0$.

12 Ehdollisen odotusarvon ominaisuudet

1. Monotoninen konvergenssi :

   $$0 \le X_n(\omega) \uparrow X(\omega) \Longrightarrow 0 \le E_P(X_n|\mathcal{G})(\omega) \uparrow E_P(X|\mathcal{G})(\omega) \quad P \text{ m.v.}$$

2. $E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\big) = E_P(X)$

3. Kun $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$,

   $$E_P(X|\mathcal{H})(\omega) = E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\big|\mathcal{H}\big)(\omega) \ P \text{ m.v.}$$

4. Jos $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$, ja $X, (XY) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, seuraa

   $$E_P(YX|\mathcal{G})(\omega) = Y(\omega)E_P(X|\mathcal{G})(\omega)$$

5. jos σ-algebra $\mathcal{H}$ on P-riippumaton σ-algebrasta $\sigma(X) \vee \mathcal{G}$,

   $$E_P(X|\mathcal{G} \vee \mathcal{H}) = E_P(X|\mathcal{G})$$

   Tod. $\forall G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}$, seuraa

   $$E_P(X\mathbf{1}_G\mathbf{1}_H) = E_P(X\mathbf{1}_G)P(H) = E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_G\big)P(H) = E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_G\mathbf{1}_H\big)$$

   ja väite seuraa koska $\mathcal{G} \vee \mathcal{H} = \sigma(G \cap H : G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H})$.

13 Säännöllinen ehdollinen todennäköisyys ja ytimet

Tapahtuman $A \in \mathcal{F}$ ehdollinen todennäköisyys ehdolla $\mathcal{G}$ σ-algebra on luonnollisesti

$$P\big(A\big|\mathcal{G}\big)(\omega) = E_P\big(\mathbf{1}_A\big|\mathcal{G}\big)(\omega)$$

joka on yksikäsitteinen modulo P-nolla mittaisia joukkoja. Koska ehdollinen odotusarvo on ei-negatiivinen operaattori, seuraa $P\big(A\big|\mathcal{G}\big)(\omega) \in [0,1]$ P-melkein varmasti.

Voidaanko sanoa että P-melkein varmasti, kuvaus $A \mapsto P\big(A\big|\mathcal{G}\big)(\omega) \in [0,1]$ on todennäköisyysmitta ?

Olkoon $\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}$ tapatuhmien jono jolla $A_n \downarrow \emptyset$. Seuraa ehdollisen odotusarvon monotonisen konvergenssin lauseesta että on olemassa joukko N jolla $P(N) = 0$

$$P(A_n|\mathcal{G})(\omega) \downarrow 0 \quad \forall \omega \in N^c \tag{13.1}$$

Tämä joukko voi toki riippua $\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}$ jonosta, ja kun yleisesti jonojen määrä on ylinumeroituva, ei mikään takaa että löytyy sellainen P-nolla mittainen joukko N jossa (13.1) pätee samaan aikaan kaikille tapahtumien jonoille joilla $A_n \downarrow \emptyset$.

Siis ehdollinen todennäköisyys ei ole automaattisesti P-melkein varmasti σ-additiivinen.

Määritelmä 13.1. *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ ja $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$ todennäköisyysavaruudet.*

Kuvaus $K : \Omega \times \widetilde{\mathcal{F}} \to [0,1]$ on $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$ todennäköisyys ydin kun

- *kaikille kiinnitetyillle $\omega \in \Omega$ kuvaus $K(\omega, \cdot) : \widetilde{\mathcal{F}} \to [0,1]$ jossa $\widetilde{A} \mapsto K(\omega, \widetilde{A})$ on todennäköisyysmitta.*
- *kaikille kiinnitetyillle tapahtumille $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{F}}$ kuvaus $K(\cdot, \widetilde{A}) : \Omega \to [0,1]$ jossa $\omega \mapsto K(\omega, \widetilde{A})$ on $\mathcal{F}$-mitallinen.*

Määritelmä 13.2. *Olkoon $\widetilde{\Omega} = \Omega$ ja $\widetilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.*

Ehdollisella todennäköisyydellä $(\widetilde{A}, \omega) \mapsto P(\widetilde{A}|\mathcal{G})(\omega)$ jossa $\widetilde{A} \in \widetilde{F}$ on säännöllinen versio jos on olemassa $(\Omega, \mathcal{G}) \to (\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$ todennäköisyys-ydin $K(\omega, \widetilde{\mathcal{A}})$, joka on $\mathcal{G}$-mitallinen ω:n suhteen, ja

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) = \int_{\widetilde{\Omega}} X(\widetilde{\omega}) K(\omega, d\widetilde{\omega})$$

kaikille $X \in L^1(\Omega, \widetilde{\mathcal{F}}, P)$

Huomautus 13.1. *määritelmässä esintyy ali-σ algebra $\widetilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$ koska joskus ehdollisen todennäköisyyden säännöllinen versio on olemassa vain jollekin pienelle σ-algebralle eikä alkuperäiselle σ-algebralle $\mathcal{F}$. Esimerkki: $\widetilde{\mathcal{F}} = \sigma(X)$ jossa X on ($\mathcal{F}$-mitallinen) reaali-arvoinen satunnaismuuttuja.*

Määritelmä 13.3. *Todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F})$ on Borel jos on olemassa mitallinen bijektio $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to [0,1], \mathcal{B}([0,1])$ jossa käänteiskuvaus f^{-1} on myös mitallinen.*

Teoreema 13.1. *Olkoon* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *todennäköisyyskolmikko.*

Olkoon $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ *mitallinen kuvaus, jossa* $(\Omega', \mathcal{F}')$ *on Borelin avaruus, ja* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *ali* σ*-algebra*

On olemassa $(\Omega, \mathcal{G}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ *todennäköisyys ydin* $K(\cdot, \cdot)$ *joka on ehdollisen todennäköisyyden säännöllinen versio: P melkein varmasti,*

$$P(X \in D|\mathcal{G})(\omega) := E_P(\mathbf{1}(X \in D)|\mathcal{G})(\omega) = K(\omega, D) \qquad \text{kaikille } D \in \mathcal{F}'$$

Todistus sivutetaan, katso Kallenbergin kirjasta Foundations of Modern Probability, Thm 6.3, 6.4.

Huomautus 13.2. *Meidän onneksi* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ *on Borel avaruus, siis satunnaisvektorin ehdollisella todennäköisyydella on aina säännöllinen versio.*

14 Ehdollisen odotusarvon laskenta P-riippumattomuuden oletuksen nojalla

Lause 14.1. *Todennäköisyysavaruudella* $(\Omega, \mathcal{F})$*, olkoon* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *ali* σ*-algebra,* $Y(\omega)$ $\mathcal{G}$*-mitallinen satunnaismuuttuja, joka saa arvot mitallisessa avaruudessa* $(S, \mathcal{S})$*, ja olkoon* $X(\omega) \in (\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{S}})$ *riippumaton* $\mathcal{G}$ σ*-algebrasta.*

Olkoon $f : (\widetilde{S} \times S) \to \mathbb{R}$ *rajoitettu ja Borel-mitallinen kuvaus.*

Silloin ehdollisella odotusarvolla on integraali-esitys

$$E_P\big(f(X,Y)\big|\mathcal{G}\big)(\omega) = E_P\big(f(X,y)\big)\Big|_{y=Y(\omega)} = \int_{\widetilde{S}} f(x, Y(\omega))P_X(dx) \tag{14.1}$$

jossa $P_X(B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\})$*.*

Tod. Olkoon

$V := \big\{ f : (\widetilde{S} \times S) \to \mathbb{R}$ Borel mitalliset ja rajoitetut funktiot joille pätee 14.1 $\big\}$

Osoitamme ensi että V on monotoninen luokka. Ehdollisen odotusarvon määritelmästä seuraa 14.1 on voimassa funktiolle $f(x, y)$ jos ja vain jos $\forall G \in \mathcal{G}$

$$E_P\big(f(X,Y)\mathbf{1}_G\big) = \int_\Omega \left\{ \int_{\widetilde{S}} f(x, Y(\omega))P_X(dx) \right\} \mathbf{1}_G(\omega)P(d\omega)$$

Selvästi V on vektori avaruus koska odotusarvo on lineaarinen. Jos $\{f_n(x, y) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq V$ ja $0 \le f_n(x, y) \uparrow f(x, y)$ jossa $f(x, y)$ on rajoitettu, seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta että $f(x, y) \in V$.

Monotonisen luokan lauseesta seuraa että jos $\mathcal{I} \subseteq V$ on π-luokka, V sisältää kaikki rajoitettu $\sigma(\mathcal{I})$ mitalliset funktiot. Väite on osoitettu kun näytämme että 14.1 pätee funktiolle $f(x, y) = \mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_D(y)$: $\forall G \in \mathcal{G}$ riippumattomuudesta seuraa

$$\begin{aligned}
&E_P\big(\mathbf{1}_B(X)\mathbf{1}_D(Y)\mathbf{1}_G\big) = P_X(B)P(\{Y \in D\} \cap G) \\
&= \int_\Omega \left\{ \int_\Omega \mathbf{1}_B(X(\widetilde{\omega}))P(d\widetilde{\omega}) \right\} \mathbf{1}_D(Y(\omega))\mathbf{1}_G(\omega)P(d\omega) = \\
&\int_\Omega \left\{ \int_\Omega \mathbf{1}_B(X(\widetilde{\omega}))\mathbf{1}_D(Y(\omega))P(d\widetilde{\omega}) \right\} \mathbf{1}_G(\omega)P(d\omega) = \\
&\int_\Omega \left\{ \int_\Omega f\big(X(\widetilde{\omega}), Y(\omega)\big)P(d\widetilde{\omega}) \right\} \mathbf{1}_G(\omega)P(d\omega)
\end{aligned}$$

joka tarkoittaa $\mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_D(y) \in V$ $\Box$.

15 Ehdollisen odotusarvon laskenta mitan-vaihdon avulla: Bayesin kaava

Lemma 15.1. *Ehdollinen odotusarvon on itse-adjungoitu operaattori, eli kun $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ on ali σ-algebra, $\forall A \in \mathcal{F}$*

$$E_P\big(X\ E_P(\mathbf{1}_A|\mathcal{G})\big) = E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\ E_P(\mathbf{1}_A|\mathcal{G})\big) = E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\ \mathbf{1}_A\big)$$

Tod. Suoraan ehdollisen odotusarvon ominaisuuksista.

Olemme esittäneet kaksi tapausta jossa osaamme laskea ehdollisia odotusarvoja: silloin kun σ-algebralla $\mathcal{G}$ on numeroituva määrä atomeja, ja riippumattomuuden nojalla lauseessa 14.1.

Yleisemmin voidaan joskus paluattaa ehdollisen odotusarvon laskeminen lauseen 14.1 tilanteeseen mitan-vaihdon avulla. Ensin esitämme mitanvaihtokaavan ehdolliselle odotusarvolle:

Teoreema 15.1. *(Abstrakti Bayesin kaava). Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$, olkoon $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ja $P \overset{\mathcal{F}}{\ll} Q$ todennäköisyysmitat joilla $Q(A) = 0 \Longrightarrow P(A) = 0$ kun $A \in \mathcal{F}$.*

Radon-Nikodym lauseesta seuraa että on olemassa Radon-Nikodym derivaatta eli satunnaismuuttuja

$$0 \leq Z(\omega) := \frac{dP}{dQ}(\omega)\ \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, Q)$$

jolle odotusarvon mitanvaihtokaava on voimassa:

$$E_P(X) = E_Q(XZ) \qquad \forall X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

Silloin ehdolliselle odotusarvolle pätee Bayesin kaava:

$$E_P\big(X\big|\mathcal{G}\big)(\omega) = \frac{E_Q\big(XZ\big|\mathcal{G}\big)(\omega)}{E_Q\big(Z\big|\mathcal{G}\big)(\omega)} \quad \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

Tod. Olkoon $G \in \mathcal{G}$. Mitanvaihto kaavasta odotusarvolle ja ehdollisen odotusarvon määritelmästä seuraa

$$\begin{aligned} E_P\big(X\mathbf{1}_G\big) &= E_Q\big(ZX\mathbf{1}_G\big) = E_Q\big(E_Q(ZX\mathbf{1}_G|\mathcal{G})\big) = E_Q\big(E_Q(ZX|\mathcal{G})\mathbf{1_G}\big) \\ &= E_Q\bigg(\frac{E_Q(Z|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})}E_Q(ZX|\mathcal{G})\mathbf{1}_G\bigg) = E_Q\bigg(Z\frac{E_Q(ZX|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})}\mathbf{1}_G\bigg) = E_P\bigg(\frac{E_Q(ZX|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})}\mathbf{1}_G\bigg) \quad \Box \end{aligned}$$

Esimerkki 15.1. *(Perinteinen Bayesin kaava) Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$, olkoon ja $X(\omega) \in \mathbb{R}^d, Y(\omega) \in \mathbb{R}^m$ satunnaismuuttujia joilla $\mathcal{F} = \sigma(X, Y)$, $\mathcal{G} = \sigma(Y)$.*

Olkoon $P \overset{\mathcal{F}}{\ll} Q$ todennäköisyysmitat joilla $X \overset{Q}{\perp\!\!\!\perp} Y$ ja olkoon

$$0 \leq Z(\omega) := z(X(\omega), Y(\omega)) = \frac{dP}{dQ}(\omega)\ \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, Q)$$

jollakin Borel-mitallisilla funktiolla $z(x,y) \geq 0$. Olkoon $f(x,y)$ rajoitettu Borel-mitallinen kuvaus. Bayesin kaavasta

$$
\begin{aligned}
E_P\big(f(X,Y)\big|\mathcal{G}\big)(\omega) &= \frac{E_Q\big(f(X,Y)Z\big|\mathcal{G}\big)(\omega)}{E_Q\big(Z\big|\mathcal{G}\big)(\omega)} \\
&= \frac{\int_\Omega f(X(\widetilde{\omega}),Y(\omega))\; z(X(\widetilde{\omega}),Y(\omega))P(d\widetilde{\omega})}{\int_\Omega z(X(\widetilde{\omega}),Y(\omega))P(d\widetilde{\omega})} \\
&= \int_\Omega f(X(\widetilde{\omega}),Y(\omega))K(\omega,d\widetilde{\omega}) \quad \textit{jossa} \\
K(\omega,d\widetilde{\omega}) &= \frac{z(X(\widetilde{\omega}),Y(\omega))}{\int_\Omega\; z(X(\omega'),Y(\omega))P(d\omega')}P(d\widetilde{\omega})
\end{aligned}
$$

on ehdollisen todennäköisyyden ydin. Voidaan myös integroida suoraan $\mathbb{R}^d$ avaruudessa jossa $X(\omega)$ saa arvoja:

$$
E_P\big(f(X,Y)\big|\mathcal{G}\big)(\omega) = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} f(x,Y(\omega))z(x,Y(\omega))P_X(dx)}{\int_{\mathbb{R}^d} z(x,Y(\omega))P_X(dx)} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,Y(\omega))k(Y(\omega),dx)
$$

jossa

$$
k(y,dx) = \frac{z(x,y)}{\int_{\mathbb{R}^d} z(x',y)P_X(dx')}P_X(dx)
$$

Kun satunnaisvektorin (X,Y) jakaumalla on tiheysfunktio $(d+m)$-ulotteisen Lebesgue mitan suhteen, siis $P(X \in dx, Y \in dy) = p_{X,Y}(x,y)dxdy$, Fubini lauseesta seuraa että silloin myös marginaalijakaumilla P_X ja P_Y on tiheydet,

$$
\begin{aligned}
P(X \in dx) &= p_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} p_{X,Y}(x,y)dy \\
P(Y \in dy) &= p_Y(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} p_{X,Y}(x,y)dx
\end{aligned}
$$

ja voidaan valita todennäköisyysavaruudeksi $\Omega = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ todennäköisyysmitoilla

$$
Q_{X,Y}(dx,dy) := (P_X \otimes P_Y)(dx,dy) = p_X(x)p_Y(y)dxdy,\; P_{X,Y}(dx,dy) = p_{X,Y}(y)dxdy
$$

Oletuksesta $P_{X,Y} \ll (P_X \otimes P_Y)$, seuraa että Radon Nykodim derivaatta on

$$
\frac{dP_{X,Y}}{dQ_{X,Y}}(x,y) = \frac{dP_{X,Y}}{d(P_X \otimes P_Y)}(x,y) = z(x,y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)p_Y(y)}
$$

Voidaan silloin kirjoittaa ehdollisen todennäköisyyden ytimen tiheysfunktioiden avulla

$$
k(y,dx) = \frac{z(x,y)}{\int_{\mathbb{R}^d} z(x',y)P_X(dx')}P_X(dx) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}dx = p_{X|Y}(x|y)dx
$$

jossa viimeinen yhtälö on ehdollisen tiheysfunktion määritelmä. Perinteinen Bayesin kaava on

$$
p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{p_X(x)p_{Y|X}(y|x)}{p_Y(y)} \quad .
$$

15.1 Ehdollisen odotusarvon laskenta tuloavaruudessa

Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyyskolmikko ja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Tuloavaruudessa $(\Omega \times \Omega)$ varustettuna tulo σ-algebralla $\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}$ määritellään Dynkinin laajennuslauseen kautta todennäköisyysmitta $\mathbb{P}$ jolla

$$\mathbb{P}(H \times G) = P(H \cap G) \quad \forall H \in \mathcal{H}, G \in \mathcal{G}$$

Lause 15.1. *Olkoon* $X(\omega, \omega') \in L^1(\Omega \times \Omega, \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}, \mathbb{P})$.
Silloin

$$\iint\limits_{\Omega \times \Omega} X(\omega, \omega')\mathbb{P}(d\omega \times d\omega') = \int_\Omega X(\omega, \omega)P(d\omega) \tag{15.1}$$

Tod. Kun $X(\omega, \omega') = \mathbf{1}_H(\omega)\mathbf{1}_G(\omega')$ jossa $H \in \mathcal{H}$ ja $G \in \mathcal{G}$, väite seuraa suoraan $\mathbb{P}$:n määritelmästä. Olkoon

$$V := \big\{ X(\omega, \omega') : \text{ rajoitetut ja } \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}\text{-mitalliset s.m. joilla (15.1) on voimassa } \big\}$$

Selvästi V on vektori avaruus, ja monotonisen konvergenssin lauseesta seuraa että V on monotoninen luokka. Koska V sisältää satunnaismuuttujat $\mathbf{1}_H(\omega)\mathbf{1}_G(\omega')$ jossa $H \in \mathcal{H}$ ja $G \in \mathcal{G}$, monotonisen luokan lauseesta seuraa sisältää myös kaikki rajoitetut $\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}$-mitalliset satunnaismuuttujat.

Yleisemmin kun X on ei-rajoitettu ja $\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}$-mitallinen voidaan ensin hajottaa $X = (X^+ - X^-) \in L^1(\Omega \times \Omega, \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}, P^{\otimes 2})$ satunnais-muuttujen jonolla $X_n = (X^+ \wedge n) - (X^- \wedge n)$, ja käytää monotonisen konvergenssin lausetta erikseen positiivisille ja negatiivisille puolille $\square$

Esimerkki 15.2. *Olkoon* $\xi(\omega), \eta(\omega) \in \mathbb{R}$ *satunnaismuuttujat* $\mathcal{H} = \sigma(\xi)$, $\mathcal{G} = \sigma(\eta)$ *ja*
$f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ *Borel-mitallinen kuvaus. Silloin*

$$\int_\Omega f(\xi(\omega), \eta(\omega))P(d\omega) = \iint\limits_{\Omega \times \Omega} f(\xi(\omega), \eta(\omega'))\mathbb{P}(d\omega, d\omega')$$

Oletamme nyt että σ-algebrat $\mathcal{H}$ ja $\mathcal{G}$ ovat P-riippumattomia eli

$$P(H \cap G) = P(H)P(G) \text{ kun } H \in \mathcal{H} \text{ ja } G \in \mathcal{G}$$

Silloin $\mathbb{P} = P \otimes P = P^{\otimes 2}$ eli

$$\mathbb{P}(H \times G) = P(H \cap G) = P(H)P(G) \quad \forall H \in \mathcal{H}, G \in \mathcal{G}$$

Tästä esityksestä seuraa suoraan että kun $G \in \mathcal{G}$,

$$E_P(X\mathbf{1}_G) = \int_\Omega X(\omega, \omega)\mathbf{1}_G(\omega)P(d\omega) = \iint\limits_{\Omega \times \Omega} X(\omega, \omega')\mathbf{1}_G(\omega')P^{\otimes 2}(d\omega, d\omega')$$

$$= \int_\Omega \bigg\{ \int_\Omega X(\omega, \omega')P(d\omega) \bigg\} \mathbf{1}_G(\omega')P(d\omega')$$

ehdollisen odotusarvon määritelmästä seuraa

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega') = \int_\Omega X(\omega, \omega')P(d\omega)$$

joka vastaa kaavan (14.1)

Yleisemmin, kun σ-algebrat $\mathcal{H}$ ja $\mathcal{G}$ eivät ole riippumattomia P-mitan suhteen, oletamme että $\mathbb{P} \ll P^{\otimes 2}$ tulo σ-algebrassa $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{G})$.

Seuraa Radon-Nikodymin lauseesta että on olemassa $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{G})$-mitallinen Radon-Nikodymin derivaatta

$$0 \leq Z(\omega, \omega') := \frac{d\mathbb{P}}{dP^{\otimes 2}}(\omega, \omega') \ \in \ L^1(\Omega \times \Omega, \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}, P^{\otimes 2})$$

jolla mitan vaihdon kaava on voimassa kaikille $X \in L^1(\Omega \times \Omega, \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}, \mathbb{P})$

$$\iint_{\Omega \times \Omega} X(\omega, \omega')\mathbb{P}(d\omega, d\omega') = \iint_{\Omega \times \Omega} X(\omega, \omega')Z(\omega, \omega')P^{\otimes 2}(d\omega, d\omega') =$$
$$\int_\Omega \left(\int_\Omega X(\omega, \omega')Z(\omega, \omega')P(d\omega) \right) P(d\omega') = \int_\Omega X(\omega, \omega)Z(\omega, \omega)P(d\omega)$$

Kun $G \in \mathcal{G}$ saadaan

$$\int_\Omega X(\omega, \omega)\mathbf{1}_G(\omega)P(d\omega) =$$
$$\iint_{\Omega \times \Omega} X(\omega, \omega')\mathbf{1}_G(\omega')\mathbb{P}(d\omega, d\omega') = \int_\Omega \left(\int_\Omega X(\omega, \omega')Z(\omega, \omega')P(d\omega) \right) \mathbf{1}_G(\omega')P(d\omega') =$$
$$\int_\Omega \left(\int_\Omega Z(\omega, \omega')P(d\omega) \right) Y(\omega')\mathbf{1}_G(\omega')P(d\omega')$$

jossa

$$Y(\omega') := Y(\omega, \omega') := \frac{\int_\Omega X(\omega, \omega')Z(\omega, \omega')P(d\omega)}{\int_\Omega Z(\omega, \omega')P(d\omega)}$$

on $\{\emptyset, \Omega\} \otimes \mathcal{G}$-mitallinen.

$$= \iint_{\Omega \times \Omega} Z(\omega, \omega')Y(\omega')\mathbf{1}_G(\omega')P^{\otimes 2}(d\omega \times d\omega') = \iint_{\Omega \times \Omega} Y(\omega')\mathbf{1}_G(\omega')\mathbb{P}(d\omega, d\omega')$$
$$= \int_\Omega Y(\omega')\mathbf{1}_G(\omega')P(d\omega')$$

Ehdollisen odotusarvon määritelmästä seuraa $Y(\omega') = E_P(X|\mathcal{G})(\omega')$.

Huomataan että myös

$$\int_\Omega X(\omega, \omega')Z(\omega, \omega')P(d\omega)$$

toteuttaa Kolmogorovin ehdollisen odotusarvon määritelmän

Tämä ei tuo ristiriitaa koska tässä tapauksessa

$$\int_\Omega Z(\omega, \omega')P(d\omega) \equiv 1$$

koska

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega \times G) &= P^{\otimes 2}(\Omega \times G) = P(G) \quad \forall G \in \mathcal{G} \\ \iff P(G) &= \int_\Omega \Big(\int_\Omega Z(\omega, \omega') P(d\omega) \Big) \mathbf{1}_G(\omega') P(d\omega') \quad \forall G \in \mathcal{G}\end{aligned}$$

Samoin,

$$\int_\Omega Z(\omega, \omega') P(d\omega') \equiv 1$$

Huomautus 15.1. *Tässä kappaleessa yleistettiin lause 14.1 ja esimerkki 15.1 tilanteeseen jossa $\mathcal{H}$ ja $\mathcal{G}$ ovat yleisiä ali-σ-algebrat eikä välttämättä satunnaisvektoreiden virittämiä.*

16 Ehdollistaminen nollamittaisiin tapahtumiin: varoitus

Olkoon $X(\omega), Y(\omega)$ riippumattomia standardi gaussisia satunnaismuuttujia, $E_P(X) = E_P(Y) = 0$, $E_P(X^2) = E_P(Y^2) = 1$. Olkoon

$$W(\omega) = (X(\omega) - Y(\omega)), \quad Z(\omega) = \mathbf{1}(Y(\omega) \neq 0)\, \frac{X(\omega)}{Y(\omega)}$$

Olkoon $N = \{\omega : \ Y(\omega) = 0\}$.
Selvästi $P(N) = 0$ ja

$$N^c \cap \{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\} = N^c \cap \{\omega : W(\omega) = 0\} = N^c \cap \{\omega : Z(\omega) = 1\}$$

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rajoitettu Borel mitallinen kuvaus.

$$\begin{aligned}
&i) && E_P(f(X) | \{X = Y\}) = \frac{\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x) \delta_0(x-y) p_X(x) p_Y(y) dx dy}{\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \delta_0(x-y) p_X(x) p_Y(y) dx dy} \\
&ii) && E_P(f(X) | W = 0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) p_{X|W}(x|0) dx \\
&iii) && E_P(f(X) | Z = 1) = \int_{\mathbb{R}} f(x) p_{X|Z}(x|1) dx
\end{aligned}$$

eivät ole valttämättä samasuuruisia. Näytämme että $i) = ii) \neq iii)$.

i) Perustuu tulkintaan

$$E_P(f(X)|\{X=Y\}) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} E_P\big(f(X)\big|\{|X-Y|<\varepsilon\}\big)$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{E_P\big(f(X)\mathbf{1}\{|X-Y|<\varepsilon\}\big)}{P(|X-Y|<\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_Y(y)dy\Big) f(x)p_X(x)dx}{\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_Y(y)dy\Big) p_X(x)dx}$$

$$= \frac{\int\limits_{\mathbb{R}} \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\Big((2\varepsilon)^{-1}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_Y(y)dy\Big) f(x)p_X(x)dx}{\int\limits_{\mathbb{R}} \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\Big((2\varepsilon)^{-1}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_Y(y)dy\Big) p_X(x)dx}$$

$$= \frac{\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)p_Y(x)p_X(x)dx}{\int\limits_{\mathbb{R}} p_Y(x)p_X(x)dx} = \frac{\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)\delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dxdy}{\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dxdy}$$

Tässä δ_0 on Diracin delta distribuutio jolla on ominaisuus

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\delta_0(x)dx = g(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x)F(dx)$$

kaikille jatkuville funktioille g, ja $F(x) = \mathbf{1}(x \geq 0)$. Diracin δ on porrasfunktion F:n derivaatta distribution mielessä.

Lasketaan:

i) $$\frac{\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)\delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dxdy}{\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dxdy} = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x)p_X(x)p_Y(x)dx}{\int_{\mathbb{R}} p_X(x)p_Y(x)dx} = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2}dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2}dx$$

ii) Bayesin kaavasta

$$p_{X|W}(x,w) = \frac{p_X(x)p_{W|X}(x,w)}{p_W(w)} = \frac{p_X(x)p_{W|X}(x,w)}{p_W(w)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}x^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}(w-x)^2)\Big(\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp(-\frac{1}{4}w^2)\Big)^{-1}$$

koska $p_{W|X}(w|x) = p_Y(w-x)$ ja W on gaussinen ja $E(W) = E(X) - E(Y) = 0$, $E(W^2) = E(X^2) + E(Y^2)$, siis

$$p_{W|X}(w|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\big(-\frac{(w-x)^2}{2}\big)$$

joka on gaussisen jakauman $\mathcal{N}(x,1)$ tiheysfunktio.

Tästä seuraa

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)p_{X|W}(x|0)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2}dx$$

joka täsmää i) arvon kanssa.

Kuitenkin

$$p_{Z|X}(z|x) = p_Y(x/z)\Big|\frac{dy}{dz}\Big| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\big(-\frac{x^2}{2z^2}\big)\ \frac{|x|}{z^2}$$

muuttujan vaihdolla $z = x/y$, ja

$$\begin{aligned}
p_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} p_{Z|X}(z|x)p_X(x)dx = \frac{1}{z^2 2\pi}\int_{\mathbb{R}} |x|\exp\big(-\frac{x^2}{2}(1+z^{-2})\big)dx \\
&= \frac{1}{z^2 2\pi}2\int_0^\infty r^{1/2}\exp\big(-\frac{r}{2}(1+z^{-2})\big)\frac{r^{-1/2}}{2}dr \\
&= \frac{1}{z^2 2\pi}\int_0^\infty \exp\big(-\frac{r}{2}(1+z^{-2})\big)dr = \frac{1}{z^2 2\pi}\frac{2}{(1+z^{-2})} = \frac{1}{(1+z^2)\pi}
\end{aligned}$$

muuttujan vaihdolla $r = x^2$. Täman jakauman nimi on Student-t vapausasteella 1.

Tästä seuraa Bayesin kaavalla

$$\begin{aligned}
p_{X|Z}(x|z) &= \frac{p_X(x)p_{Z|X}(x|z)}{p_Z(z)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\big(-\frac{x^2}{2z^2}\big)\ \frac{|x|}{z^2}}{(1+z^2)^{-1}\pi^{-1}} \\
&= \frac{(1+z^2)|x|}{2}\exp\big(-\frac{x^2}{2}(1+z^{-2})\big)
\end{aligned}$$

Kun $z = 1$ saadaan $p_{X|Z}(x|1) = |x|\exp(-x^2)$ ja

$$E_P(f(X)|Z=1) = \int_{\mathbb{R}} f(x)p_{X|Z}(x|1)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)|x|\exp(-x^2)dx$$

joka on eri kuin integraalien i) ii) arvo.

Eri nolla mittaisilla tapahtumilla voi olla eri esityksiä eri satunaaismuuttujen avulla, ja vastaavien ehdollisten odotusarvojen pistettäiset arvot saattaavat olla eriläisiä. Tämä ei ole ristiriidassa todennäköisyysteorian kanssa koska aina voidaan vaihtaa ehdollisen odotusarvon arvot pistettäin nolla mittaisissa joukoissa.

17 Martingaalit

Määritelmä 17.1. *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ todennäköisyysavaruus, ja $\mathbb{T} = \mathbb{N}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+, \dots$ aikaindeksien joukko.*

Filtraatio $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T})$ on σ-algebroiden kokoelma, joka on ajan suhteen ei-vähenevä:

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \quad \forall 0 \le s \le t$$

Määritelmä 17.2. *Stokastinen prosessi $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{T})$ on sopiva (tai adaptoitu) filtration $\mathbb{F}$:n suhteen, kun $X_t(\omega)$ on $\mathcal{F}_t$-mitallinen $\forall t \in \mathbb{T}$.*

Määritelmä 17.3. *Diskreetti ajassa, eli kun $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$, stokastinen prosessi $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{T})$ on ennustettava filtration $\mathbb{F}$:n suhteen, kun $X_t(\omega)$ on $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallinen $\forall t \in T$.*

Määritelmä 17.4. *Sanotaan että prosessi $X = (X_t : t \in \mathbb{T})$ on (ali,yli)-martingaali filtraation $\mathbb{F}$:n suhteen kun*

1. (X_t) *on* $\mathbb{F}$*-sopiva*
2. $X_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ $\forall t \in \mathbb{T}$,
3. $$E_P(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s \quad \forall s \leq t,$$
   vastaavasti $\leq$ *ylimartingaalin tapauksessa ja* $\geq$ *alimartingaalin tapauksessa.*

Huomataan että martingaalin ominaisuus riippuu sekä todennäköisyysmitasta että filtraatiosta. Ylimartingaali on ajan-suhteen "keskimäärin" ei-kasvava, alimartingaali on "keskimäärin" ei-vähenevä, martingaali on sekä ylimartingaali että alimartingaali.

Lemma 17.1. *Diskreetti ajassa ($\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$), määritelmässä 17.4 ominaisuus (3) seuraa kaikille $s \leq t$ kun*

$$E_P(M_t|\mathcal{F}_{t-1}) = M_{t-1} \quad \forall t$$

Tod. Induktiolla, kun $t = s$,

$$E_P(M_t|\mathcal{F}_s) = E_P(M_s|\mathcal{F}_s) = M_s$$

Muuten voidaan käyttää induktiota $r = (t-s)$:n suhteen, olettamalla että lemma on voimassa kaikille arvoille t, s joilla $(t-s) < r$, kun $(t-s) = r$ seuraa

$$\begin{aligned} &E_P(M_t|\mathcal{F}_s) = E_P(E_P(M_t|\mathcal{F}_{s+1})|\mathcal{F}_s) \\ &= E_P(M_{s+1}|\mathcal{F}_s) = M_s \end{aligned}$$

Samoin voidaan tarkistaa myös ali- ja yli- martingaalin epäyhtälöitä.

Esimerkki 17.1. *Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N}) \subseteq L^1(P)$ riippumattomien satunnaismuuttujen jono jolla $E(X_t) = \mu \in \mathbb{R}$, ja olkoon $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_t)$*

$S_t = (X_1 + \dots + X_t)$ on $\mathbb{F}$-alimartingaali kun $\mu > 0$, ja $\mathbb{F}$-ylimartingaali kun $\mu > 0$, ja $\mathbb{F}$-martingaali kun $\mu = 0$.

Esimerkki 17.2. *Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N})$ riippumattomien satunnaismuuttujen jono jolla $X_t(\omega) \geq 0$ P-m.v. ja $E(X_t) = \mu \in [0, +\infty)$, ja olkoon $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_t)$*

Silloin tuloprosessi $M_t = (X_1 X_2 \dots X_t)$ on $\mathbb{F}$-alimartingaali kun $\mu > 1$, ja $\mathbb{F}$-ylimartingaali kun $\mu < 1$, ja $\mathbb{F}$-martingaali kun $\mu = 1$.

Esimerkki 17.3. *Olkoon $X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ $t \in \mathbb{N}$, diskreetti aikainen Markovin ketju alkujakaumalla $\pi(dx)$ ja siirtymäytimellä $K(x, dy)$.*

Olkoon $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_t)$.

Määritellään operaattori

$$(Kf)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y) K(y, dx) = E_x(f(X_1)) = E_P(f(X_t)|X_{t-1} = x)$$

Osoita että

$$M_t(f) = \sum_{s=1}^{t} (f(X_s) - (Kf)(X_{s-1}))$$

on $\mathbb{F}$-martingaali kun $f(x)$ on rajoitettu ja Borel mitallinen.

Teleskoppisen summan esityksestä,

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{s=1}^{t} (f(X_s) - f(X_{s-1}) =$$

$$f(X_0) + \sum_{s=1}^{t} (f(X_s) - Kf(X_{s-1}) + \sum_{s=1}^{t} ((Kf)(X_{s-1}) - f(X_{s-1}))$$
$$= f(X_0) + M_t(f) + A_t(f)$$

saadaan Doobin hajotelma jossa $A_t(f)$ on ennustettava prosessi

Lause 17.1. *Olkoon (X_t) martingaali ja (Y_t) ennustettava prosessi filtraation $(\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N})$ suhteen.*

Määritellään martingaalimuunnos tai aika-diskreetti stokastinen integraali

$$M_t = \sum_{s=1}^{t} Y_s(X_s - X_{s-1}) = \sum_{s=1}^{t} Y_s \Delta X_s$$

Kun $E(|Y_s \Delta M_s|) < \infty \ \forall s \in \mathbb{N}$, (M_t) on martingaali.

Tod. Määritelmästä seuraa että M_t on $\mathbb{F}$-sopiva ja integroituvuus ehto seuraa kolmio epäyhtälöstä. Tarkistamme että martingaali-ominaisuus on voimassa:

$$E_P(M_t - M_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) = E_P(Y_t(X_t - X_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}) = Y_t E_P(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$$

jossa käytettiin integrandin (Y_t):n $\mathbb{F}$-ennustettavuutta.

Integroituuvus voidaan tärkistää Hölderin epäyhtälöllä

$$E(|Y_s \Delta M_s|) \leq \| Y_s \|_{L_p} \| \Delta M_s \|_{L_q}$$

kun $p, q \in [1, +\infty]$ ovat konjugaatti-eksponentteja joilla $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Vedonlyönti-tulkinta Oletamme että hetkellä $(t-1)$ on mahdollisuus ostaa tai myydä arpajaisia hinnalla X_{t-1}. Hetkellä t arpajaisen arvo on X_t, satunnaisvoittolla $\Delta X_t = (X_t - X_{t-1})$ (negatiivinen voitto tulkitaan on tappioksi). Tässä $Y_t(\omega)$ on vedonlyonti strategia, ennustettava siinä mielessä että on $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallinen kun ΔX_t on $\mathcal{F}_t$-mitallinen, siis kun lyödään vetoa ei tiedetä mitä tapahtuu seuraavaksi. M_t on pelajan pääoma ja

$$M_t - M_0 = \sum_{s=1}^{t} Y_s \Delta X_s$$

on pelajan voitto. Reilussa pelissa $E_P(\Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ ja arpajaisen arvoprosessi on martingaali. Lause 17.1 kertoo että niin kauan kun integroituvuus-ehdot ovat voimassa ja pelistrategia on ennustettava, pelajan voitto-prosessi on martingaali. Kun X_t on ylimartingaali (kuten roulette-pelissä), ja ennustettava pelistrategia on rajoitettu ja ei-negatiivinen, voittoprosessi on edelleen ylimartingaali.

Määritelmä 17.5. *Satunnais-hetki $\tau(\omega) \in \mathbb{T} = \mathbb{N}$ on $(\mathcal{F}_t)$-pysähdyshetki kun*

$$\{\omega : \tau(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

18 Doobin Martingaali-konvergenssi lause

Martingaali $(M_t : t \in \mathbb{N})$ joka on rajoitettu $L^1(P)$ normissa, suppenee P-melkein varmastiä kun $t \to +\infty$.

Teoreema 18.1. *(Doob)*
Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N})$ ylimartingaali jolla $\sup_{t\in\mathbb{N}} E_P(X_t^-) < \infty$,
(tässä $x^- = \max(-x, 0)$).
Silloin

$$\sup_{t\in\mathbb{N}} E_P(|X_t|) < \infty$$
$$\lim_{t\to\infty} X_t(\omega) = X_\infty(\omega) \qquad P\text{-m.v.}$$

jossa $X_\infty(\omega) \in L^1(\Omega)$

Huomautus : vaikka $X_\infty(\omega) \in L^1(\Omega)$, ilman tasaisen integroituvuuden ehtoa, konvergenssi $L^1(P)$-mielessä ei seura.

Tod. Koska X_t on ylimartingaali, $\forall t \in \mathbb{N}$

$$E(X_t^+) \le E(X_0) + E(X_t^-)$$

joten

$$\sup_t E(X_t^+) \le E(X_0) + \sup_t E(X_t^-)$$

jossa $E(|X_0|) < \infty$, siksi $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ on rajoitettu $L^1(P)$ avaruudessa.

Olkoon $a < b$, ja määritellän pysähdyshetkien jono

$$\sigma_0(\omega) = \inf\{s \in \mathbb{N} : X_s(\omega) < a\}$$

(ensimmäinen a tason alituksen hetki)

$$\tau_i(\omega) = \inf\{s > \sigma_i(\omega) : X_s(\omega) \ge b\},$$
$$\sigma_i(\omega) = \inf\{s > \tau_{i-1}(\omega) : X_s(\omega) < a\},\ i \ge 1$$

joilla $0 \le \sigma_i < \tau_i < \sigma_{i+1} < \dots$ Nämä ovat pysähdyshetkiä, koska $\forall t \in \mathbb{N}$ tapahtumat

$$\{\omega : \sigma_i(\omega) \le t\} \quad \text{ja} \quad \{\omega : \tau_i(\omega) \le t\}$$

riippuvat ainoastaan prosessin polusta $(X_1(\omega), \dots, X_t(\omega))$, ja siksi ovat $\mathcal{F}_t$-mitallisia.

Määritellään sijoitusstrategia

$$C_t(\omega) = \begin{cases} 1 & t \in (\sigma_i, \tau_i] \text{ joillekin } i \in \mathbb{N} \\ 0 & t \in (\tau_i, \sigma_{i+1}] \end{cases}$$

Koska τ_i ja σ_i ovat pysähdyshetkiä, kaikille $t \in N$

$$\{C_t = 1\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{t \in (\sigma_i, \tau_i]\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{\sigma_i \le (t-1)\} \cap \{\tau_i \le (t-1)\}^c \in \mathcal{F}_{t-1}$$

Koska $C_t(\omega) \in \{0,1\}$ on ei-negatiivinen ja rajoitettu ennustettava prosessi, seuraa että martinagaali muunnos

$$Y_t(\omega) = \sum_{s=1}^{t} C_s(\omega)\Delta X_s$$

on myös ylimartingaali, erityisesti $E(Y_t) \le E(Y_0) = 0$.

Koska

$$Y_t \ge (b-a)U_{[a,b]}([0,t]) - (X_t - a)^-$$

ja koska $E(Y_t) \le E(Y_0) = 0$, seuraa *Doobin ylitysten-epäyhtälö (upcrossing-inequality)*

$$E_P\big(U_{[a,b]}([0,t])\big) \le \frac{1}{(b-a)} E_P\big((X_t - a)^-\big)$$

Koska $U_{[a,b]}([0,t])$ on ei-vähenevä, $\forall\omega$ on olemassa

$$U_{[a,b]}([0,\infty),\omega) := \lim_{t\to\infty} U_{[a,b]}([0,t]) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$
$$(X_t - a)^- = \max(a - X_t, 0) \le |a| + X_t^-$$

seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta

$$E_P\big(U_{[a,b]}([0,\infty))\big) = \lim_{t\to\infty} E_P\big(U_{[a,b]}([0,t])\big) \le \frac{1}{(b-a)}\left(|a| + \sup_{t\in\mathbb{N}} E_P(X_t^-)\right) < \infty$$

Erityisesti $U_{[a,b]}([0,\infty),\omega) < \infty$ P-melkein varmasti.

Olkoon

$$\begin{aligned} N &= \big\{\omega : \liminf_{t\to\infty} X_t(\omega) \lneq \limsup_{t\to\infty} X_t(\omega)\big\} \\ &= \bigcup_{a<b\in Q} \big\{\omega : \liminf_{t\to\infty} X_t(\omega) \le a < b \le \limsup_{t\to\infty} X_t(\omega)\big\} \\ &= \bigcup_{a<b\in\mathbb{Q}} \big\{U_{[a,b]}([0,\infty),\omega) = \infty\big\} \end{aligned}$$

on P-nolla tapahtumien numeroituva yhdiste, joten $P(N) = 0$.

Tämä tarkoittaa että P-melkein varmasti $(X_t(\omega))_{t\in\mathbb{N}}$ suppenee kohti raja-arvoa $X_\infty(\omega) := \limsup_{t\to\infty} X_t(\omega)$, $\quad\forall\omega \in \Omega$.

A priori $X_\infty(\omega) \in [-\infty,\infty]$, mutta Fatoun lemmasta seuraa

$$E(|X_\infty|) = E(\liminf_t |X_t|) \le \liminf_t E(|X_t|) \le \sup_t E(|X_t|) < \infty,$$

siksi $|X_\infty(\omega)| < \infty$ P-melkein varmasti $\square$.

Seuraus 18.1. *Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N})$ alimartingaali jolla $E_P(X_t^+) < \infty$. Silloin, P-melkein varmasti $\exists \lim_{t\to\infty} X_t(\omega) = X_\infty(\omega) \in L^1(P)$.*

Tod. Doobin konvergenssi lause soveltuu ylimartingaalille $(-X_t)$.

Seuraus 18.2. *Kun X_t on ei-negatiivinen ylimartingaali, on olemassa P-melkein varmasti raja-arvo $X_\infty(\omega) := \lim_{t\to\infty} X_t(\omega) \geq 0$ jolla $E_P(X_\infty|\mathcal{F}_t)(\omega) \leq X_t(\omega)$ $\forall t < \infty$.*

Tod. Doobin martingaalikonvergenssilause soveltuu koska $X_t^-(\omega) \equiv 0$. Fatou lemmasta ehdolliselle odotusarvolle

$$\begin{aligned} &E_P(X_\infty|\mathcal{F}_t) = E_P(\liminf_u X_u|\mathcal{F}_t) \\ &\leq \liminf_u E_P(X_u|\mathcal{F}_t) \leq X_t \end{aligned}$$

(X_t) on ylimartingaali laajennetulla indeksijoukolla $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ □

18.1 Tasaisesti integroituvat martingaaalit

Lause 18.1. *Olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Kokoelma*

$$\big\{ E_P(X|\mathcal{G})(\omega) : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \text{ ali } \sigma\text{-algebra} \big\}$$

on tasaisesti integroituva.

Tod. Koska $\{X\} \subseteq\in L^1(P)$ on tasaisesti integroituva, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ jolla $E_P(|X|\mathbf{1}_A) < \varepsilon$ kun $P(A) < \delta$.

Olkoon $Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega)$, seuraa että $E_P(|Y|) \leq E_P(|X|) < \infty$

$$KP(|Y| > K) \leq E_P(|Y|) \leq E_P(|X|)$$

josta seuraa $P(|Y| > K) < \delta$ kun $K > E_P(|X|)\delta^{-1}$, ja

$$\begin{aligned} &\varepsilon \geq E_P(|X|\mathbf{1}(|Y| > K)) = E_P\big(E_P(|X||\mathcal{G})\mathbf{1}(|Y| > K|)\big) \\ &\geq E_P\big(|Y|\mathbf{1}(|Y| > K)\big) \end{aligned}$$

on voimassa samaan aikaan kaikille ali σ-algebroille $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Seuraus 18.3. *Olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ja $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T})$ filtraatio. Silloin*

$$M_t(\omega) = E_P(X|\mathcal{F}_t)(\omega) \quad t \in \mathbb{T}$$

on tasaisesti integroituva martingaali.

Teoreema 18.2.

- *$\mathbb{F}$-martingaali $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva jos ja vain jos on olemassa satunnaismuuttuja $M_\infty(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$*

  jossa $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_t$ ja

  $M_t(\omega) \to M_\infty(\omega)$ P-melkein varmasti ja $L^1(P)$ mielessä.

- *Kun $\mathbb{F}$-martingaali $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on ei-negatiivinen, erityisesti se on ei-negatiivinen ylimartingaali, seuraa laueseesta 18.2 että on olemassa $M_\infty(\omega) \in L^1(P)$ jolla $M_t(\omega) \to M_\infty(\omega)$ P-melkein varmasti ja $E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t)(\omega) \leq M_t(\omega)$ $\forall t \in \mathbb{N}$.*

  Silloin $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva ja $M_t(\omega) = E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t)(\omega)$ jos ja vain jos $E_P(M_0) = E_P(M_\infty)$.

Tod. Koska $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on rajoitettu $L^1(P)$:ssa koska on tasaisesti integroituva ja

$$\sup_t E_P(|M_t|) \le K + \sup_{t\in\mathbb{N}} E_P\big(|X_t| \mathbf{1}(|X_t| > K)\big) < \infty.$$

Doobin martingaali konvergenssi lause soveltuu

$$\lim_{t\to\infty} M_t(\omega) = M_\infty(\omega) \qquad P\text{-m.v.}$$

jossa määritellään $\forall\omega$

$$M_\infty(\omega) := \lim \inf_{t\to\infty} M_t(\omega)$$

$L^1(P)$ konvergenssin karakterisaatiosta seuraa että $M_t \overset{L^1(P)}{\to} M_\infty$.

Olkoon $A \in \mathcal{F}_t$, koska $(M_t(\omega)\mathbf{1}_A(\omega) : t \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva, seuraa kun $\forall u \ge t$

$$E_P(M_t \mathbf{1}_A) = E_P(M_u \mathbf{1}_A) \to E_P(M_\infty \mathbf{1}_A) \text{ kun } u \uparrow \infty \qquad \forall A \in \mathcal{F}_t$$

joka tarkoittaa $E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t)(\omega) = M_t(\omega)$.

Kun ă(M_t) on ei-negatiivinen martingaali, seuraa että

$$M_t - E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t) \ge 0$$

jos

$$0 = E_P(M_t) - E_P(M_\infty) = E_P\big(M_t - E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t)\big)$$

seuraa että

$$M_t = E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t)$$

ja se on tasaisesti integroituva.

Huomautus $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva martingaali, jos ja vain jos (M_t) on martingaali laajennetussa aikaindeksijoukolla $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Esimerkki 18.1. *Olkoon $X_t(\omega) \ge 0$ ja P-riippumattomia, joilla $E_P(X_t) = 1$ $\forall t \in \mathbb{N}$. Silloin $M_t(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega)\dots X_t(\omega)$ on $\mathbb{F}$-martingaali jossa $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$.*

Koska M_t on ei-negatiivinen ylimartingaali, seuraa että P-melkein varmasti $\lim_{t\to\infty} M_t(\omega) = M_\infty(\omega) \in L^1(p)$, ja $M_t(\omega) \ge E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t)(\omega)$.

Jos $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva, seuraa $M_t(\omega) = E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t)(\omega)$.

18.2 Martingaalin takaperäinen konvergenssi

Olkoon $(\mathcal{F}_t : t \in -\mathbb{N})$ filtraatio. Kun $-\infty \le s \le t \le 0$

$$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_t \supseteq \mathcal{F}_s \supseteq \mathcal{F}_{-\infty} := \bigcap_{t\in-\mathbb{N}} \mathcal{F}_t$$

jossa $\mathcal{F}_{-\infty}$ on *häntä σ-algebra* .

Teoreema 18.3. *(Doobin martingaalin takaperäinen konvergenssilause) Olkoon* $(X_t : t \in -\mathbb{N})$ *alimartingaali filtraatiossa* $(\mathcal{F}_t : t \in -\mathbb{N})$.

Tarkastellaan mitä tapahtuu kun $t \downarrow (-\infty)$ *ja informaatio pienenee.*

1. P*-melkein varmasti on olemassa raja-arvo*

$$X_{-\infty}(\omega) = \lim_{t\to-\infty} X_t(\omega) \in [-\infty, \infty)$$

2. *Kun*

$$\sup_{t\le 0} E(X_t^-) < +\infty$$

seuraa että $X_{-\infty}(\omega) \in L^1(P)$.

3. *Kun* $(X_t : t \in -\mathbb{N})$ *on martingaali, koska* $X_t = E_P(X_0|\mathcal{F}_t)$ $\forall t \in -\mathbb{N}$ *se on on tasaisesti integroituva ja*

$$X_{-\infty}(\omega) = E(X_0|\mathcal{F}_{-\infty})(\omega)$$

eli martingaalin ominaisuus on voimassa lajennetussa aika-indeksi joukossa $\{-\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

Tod. Olkoon $U_{(a,b)}([t, 0])$ prosessin (X_t):n (a, b)-ylitysten määrä aikavälissä $[t, 0]$, jossa $a < b \in \mathbb{R}$, $t \in -\mathbb{N}$.

Olkoon $C_t(\omega) \in \{0, 1\}$ sama ennustettava pelistrategia kuten Doobin etuperäisessa martingaalikonvergenssilauseessa, ja

$$Y_u - Y_t = \sum_{r=t+1}^{u} C_r \Delta X_r \quad t \le u \le 0$$

on ylimartingaali aikaparemetrilla $u \in \{t, t + 1, \ldots, 0\}$. Kun $t < u = 0$

$$Y_0(\omega) - Y_t(\omega) \ge U_{(a,b)}([t, 0], \omega) - (Y_0(\omega) - a)^-$$

$E(Y_0 - Y_t) \le 0$ koska (Y_t) on alimartingaali, josta seuraa

$$E_P(U_{[a,b]}([t, 0])) \le \frac{E_P((X_0 - a)^-)}{(b - a)} \le \frac{(|a| + E_P(|X_0|)}{(b - a)}$$

ja kuten etuperäisessa martingaalikonvergenssilauseessa

$$X_{-\infty}(\omega) := \limsup_{t\to-\infty} X_t(\omega) = \liminf_{t\to-\infty} X_t(\omega) \quad P\text{-m.v.}$$

Kun X_t on martingaali, on tasaisesti integroituva ja siitä seuraa konvergenssi $L^1(P)$ mielessä.

Alimartingaalin tapauksessa, koska $X_t \le E(X_0|\mathcal{F}_t)$ kun $t < 0$, seuraa

$$X_t^+ \le E(X_0|\mathcal{F}_t)^+ \le E(X_0^+|\mathcal{F}_t)$$

ja Fatou lemmasta seuraa

$$\begin{aligned} E(|X_{-\infty}|) &\le \liminf_t E_P(X_t^+) + \liminf_t E_P(X_t^-) \\ &\le E_P(|X_0|) + \sup_t E_P(X_t^-) \end{aligned}$$

Olkoon $A \in \mathcal{F}_{-\infty} \subseteq \mathcal{F}_t \ \forall t \in -\mathbb{N}$. Koska $\big(X_t = E_P(X_0|\mathcal{F}_t) : t \in -\mathbb{N}\big)$ on tasaisesti integroituva martingaali, $L^1(P)$-konvergenssin karakterisaation nojalla voidaan ottaa raja-arvoa odotusarvon sisään kun tarkistamme ehdollisen odotusarvon määritelmää, eli

$$E_P(X_0 \mathbf{1}_A) = E_P(X_t \mathbf{1}_A) \to E_P(X_\infty \mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_{-\infty}$$

joka tarkoittaa $X_{-\infty} = E_P(X_t|\mathcal{F}_{-\infty})$.

Teoreema 18.4. *(Kolmogorovin $0-1$ laki) Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N})$ satunnaismuuttujen jono ja*

$$\mathcal{T}_{-t} := \sigma(X_u : u \geq t), \quad \mathcal{T}_{-\infty} := \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{-t} \tag{18.1}$$

$\mathcal{T}_{-\infty}$ kutustaan jonon häntä σ-algebraksi.

Kun $(X_t : t \in \mathbb{N})$ ovat P-riippumattomia, $\mathcal{T}_{-\infty}$ on P-triviaali, eli $\forall A \in \mathcal{T}$, $P(A) \in \{0,1\}$

Tod. Olkoon $A \in \mathcal{T}_{-\infty}$. Koska $A \in \mathcal{T}_{-t} \forall t$, seuraa $A \perp\!\!\!\perp (X_1, \dots, X_t) \forall n$, eli $A \perp\!\!\!\perp (X_t : t \in \mathbb{N})$.

Koska $A \in \mathcal{T}_{-\infty} \subseteq \sigma(X_t : t \in N)$, seuraa että A on P-riippumaton itsestään, eli

$$P(A) = P(A \cap A) = P(A)P(A)$$

josta seuraa $P(A) \in \{0,1\}$ □

Teoreema 18.5. *(Kolmogorovin vahva suurten lukujen laki)*

Olkoon $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia jossa $X_1 \in L^1(P)$, ja olkoon

$$S_t(\omega) = X_1(\omega) + \dots + X_t(\omega)$$

Silloin

$$\lim_{t \to \infty} t^{-1} S_t(\omega) = E_P(X_1) \quad \textit{P-melkein varmasti ja } L^1(P)\textit{:n mielessä.}$$

Tod.

Olkoon $(\mathcal{F}_{-t} : t \in \mathbb{N})$ filtraatio jossa kun $t \leq 0$

$$\mathcal{F}_{-t} = \sigma(S_t, S_{t+1}, \dots),$$

ja martingaali $(M_{-t} : t \in \mathbb{N})$ jossa

$$M_{-t} = E_P(X_1|\mathcal{F}_{-t})$$

Huomataan että σ-algebran $\mathcal{F}_{-t}$:n sisältämä informaatio vähenee kun $t \uparrow \infty$.

Symmetrisyyden nojalla satunnaisparit (S_t, X_r) ja (S_t, X_1) ovat samoin jakautuneita kun $1 \leq r \leq t$, ja P-riippumattomuusesta seuraa kun $t \geq 0$

$$\begin{aligned} &M_{-t} := E_P(X_1|\mathcal{F}_{-t}) = E_P(X_1|S_t, S_{t+1}, S_{t+2}, \dots) \\ &= E_P(X_1|S_t, X_{t+1}, X_{t+2} \dots) = E_P(X_1|\sigma(S_t)) = E_P(X_r|\sigma(S_t)) \quad \forall 1 \leq r \leq t \end{aligned}$$

eli

$$S_t = E_P(X_1 + \cdots + X_t|\sigma(S_t)) = \sum_{r=1}^{t} E_P(X_r|\sigma(S_t)) = tE_P(X_1|\sigma(S_-))$$

ja $M_{-t}(\omega) = S_t(\omega)/t$ kun $t \geq 0$. Doobin takaperäisestä martingaali-konvergenssi lausesta seuraa P-melkein varmasti ja $L^1(P)$ mielessä on olemassa rajaarvo

$$M_{-\infty}(\omega) = \lim_{t\to\infty} t^{-1} S_t(\omega) = M_{-\infty}(\omega) \qquad P \text{ m.v.}$$

jossa

$$M_{-\infty}(\omega) := \liminf_{t\to\infty} t^{-1} S_t(\omega) \quad \forall\omega$$

Huomataan myös että $\forall\omega \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} S_t(\omega) = \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) + \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=(n+1)}^{t} X_i(\omega)$$
$$= 0 + \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=(n+1)}^{t} X_i(\omega)$$

on $\mathcal{T}_{-n} = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$-mitallinen $\forall n$, on mitallinen häntä σ-algebran $\mathcal{T}_{-\infty}$ suhteen (18.1), koska $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ ovat P-riippumattomia Kolmogorovin $0-1$ lemmasta seuraa että $M_{-\infty}(\omega)$ on P-triviaali:

$P(t \leq M_{-\infty}) \in \{0,1\}$ $\forall t$ ja $P(M_{-\infty} < \infty) = 1$, siitä seuraa että on olemassa $c \in \mathbb{R}$ jolla $P(M_{-\infty} = c) = 1$.

Siis P-melkein varmasti ja $L^1(P)$ mielessä

$$\frac{1}{t} S_t(\omega) \to c = E_P(X_1|\mathcal{F}_{-\infty})(\omega)$$

Ottaamalla odotusarvoa seuraa

$$c = E_P(M_{-\infty}) = E_P\big(E_P(X_1|\mathcal{F}_{-\infty})\big) = E_P(X_1).$$

Huomautus Symmetriasta seuraasi että $t^{-1}S_t(\omega) = E_P(X_1|\sigma(S_t))(\omega)$, ja sen konvergenssi P-melkein varmasti ja $L^1(P)$ mielessä seurasi taperäisestä martingaali-konvergenssi lauseesta. Riippumattomuuden tarvittiin osoittamaan

$$E_P(X_1|\sigma(S_t))(\omega) = E_P(X_1|\sigma(S_t, S_{t+1}, S_{t+2} \dots))(\omega)$$

ja että raja-arvo on P-triviaali. Kun luovutaan rippumattomuudesta, raja-arvo on satunnainen. Siihen pohjautuu De Finettin lause. Bruno De Finetti (1906-1985) oli italialainen matematiikko, taloustieteilijä ja filosofi.

19 Vaihdettavuus ja De Finettin lause

Määritelmä 19.1. *Satunnaisjono $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ joka saa arvot todennäköisyysavaruudessa $(S, \mathcal{S})$ on äärettömästi vaihdettavissa (engl. infinitely exchangeable) kun $\forall n$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{N}$ ja indeksien $\{1, \dots, n\}$ permutaatio π, satunnaisvektorit $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ ja $(X_{t_{\pi(1)}}, \dots, X_{t_{\pi(n)}})$ ovat samoin jakautuneita P mitan suhteen.*

Huomataan että kun jono $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ saa arvot $\mathbb{R}$:ssa, kuuten riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujen tapauksessa

$$M_{-t}(\omega) = t^{-1}S_t(\omega) := E(X_1|\mathcal{T}_{-t}), \quad t \in \mathbb{N}$$

on martingaali jolla on martingaali jolla on raja-arvo P-melkein varmasti ja $L^1(P)$:mielessä kun $t \to \infty$

$$M_{-\infty}(\omega) = E(X_1|\mathcal{T}_{-\infty})(\omega)$$

Häntä σ-algebra $\mathcal{T}_{-\infty}$ ei tarvitse olla triviaali ja $M_{-\infty}(\omega)$ on aidosti satunnainen.

Määritelmä 19.2. *Satunnaismuuttujat $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ jotka saavat arvoja todennäköisyysavaruudessa $(S, \mathcal{S})$ ovat ehdollisesti riippumattomia ja samoin jakautuneita ehdolla σ-algebraa $\mathcal{G}$ kun $\forall n$, $t_1, \dots, t_n$, $A_1 \dots A_n \in \mathcal{S}$.*

$$P(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n|\mathcal{G})(\omega) = \prod_{i=1}^{n} P(X_1 \in A_i|\mathcal{G})(\omega) \quad P \ m.v$$

Ottaamalla ehdollisen odotusarvon odotusarvoa, seuraa että ehdollisesti riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujat ovat äärettömästi vaihdettavissa.

Teoreema 19.1. *(De Finetti) Olkoon $(S, \mathcal{S})$ Borelin avaruus. Kun satunnaisjono $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N}) \subseteq S$ on äärettömästi vaihdettavissa P:n suhteen toinen implikaatio on myös voimassa, satunnaismuuttujat ovat ehdollisesti riippumattomia ja samoin jakautuneita ehdolla häntä-σ-algebraa $\mathcal{T}_{-\infty}$ joka tullaan määrittelemään.*

Proof Olkoon

$$\mu_t(dx; \omega) = t^{-1} \sum_{i=1}^{t} \mathbf{1}(X_i(\omega) \in dx)$$

satunnaismuuttujen $(X_1, \dots, X_t)$ empiirinen mitta joka virittää σ-algebran $\sigma(\mu_t) = \sigma\{\mu_t(A) : A \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{F}$.

Huomataan että $\sigma(\mu_t) \subseteq \sigma(X_1, \dots, X_t)$, ja kun $t > 1$ se on aidosti pienempi koska empiirinen mitta sisältää satunnaismuuttujen arvot mutta unohtaa niiden järjestyksen.

Määritellään vähenevä σ-algebroiden jono

$$\mathcal{T}_{-t} := \bigvee_{k\geq t} \sigma(\mu_k), \quad \mathcal{T}_{-\infty} = \bigcap_{t\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_{-t} \text{ , on häntä-}\sigma\text{-algebra .}$$

Olkoon $k \in \mathbb{N}$ ja $f(x_1, \dots, x_k) : S^k \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja mitallinen funktio. Kun $t \geq k$ laskemme symmetrian avulla $E_P(f(X_1, \dots, X_k)|\mathcal{T}_{-t})(\omega)$.

Olkoon $1 \leq k \leq t$ ja määritellään satunnaistodennäköisyysmitta

$$\mu_t^{\circ k} : \mathcal{S}^{\otimes k} \to [0, 1]$$

joka on säännöllinen versio satunnaisvektorin $(X_1, \dots, X_k)$ ehdollisesta jakaumasta ehdolla $\sigma(\mu_t)$ (joka on olemassa koska $(S, \mathcal{S})$ on Borelin avaruus).

Symmetriasta seuraa

$$
\begin{aligned}
&E_P(f(X_1,\dots,X_k)|\sigma(\mu_t))(\omega)\\
&=\mu_t^{\circ k}(f;\omega):=\int_{S^k} f(x)\mu_t^{\circ k}(dx;\omega)=\frac{1}{t!}\sum_{\pi} f(X_{\pi(1)}(\omega),\dots,X_{\pi(k)}(\omega))\\
&=\frac{(t-k)!}{t!}\sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le t \text{ eriläisiä}} f(X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_k})
\end{aligned}
$$

jossa summa otetaan yli $\{1,\dots,t\}$ joukon permutaatioita π.

Huomataan että $\mu^{\circ k}(dx;\omega)$ on $\sigma(\mu_t)$-mitallinen, koska rippuu vain arvoista $\{X_1(\omega),\dots,X_t(\omega)\}$ eikä niiden järjesyksestä. Huomataan myös että $\mu_t^{\circ k}(dx)$ ei ole tulo mitta, koska summassa ei ole toistuvien indeksien termeja.

Huomataan myös että kun $k=1$

$$
\mu_t^{\circ 1}(A)=\mu_t(A)=\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}\mathbf{1}(X_k\in A)
$$

on otoksen $(X_1(\omega),\dots,X_t(\omega))$:n empiirinen mitta.

Kun $k\le t$ vaihdettavuuden nojalla kaikille $\{1,\dots,t\}$ joukon permutaatiolle π $(X_1,\dots,X_k,\mu_t)$ ja $(X_{\pi(1)},\dots,X_{\pi(k)},\mu_t)$ ovat samoin jakutuneita, josta seuraa

$$
E_P(f(X_1,\dots,X_k|\sigma(\mu_t))(\omega)=E_P(f(X_{\pi(1)},\dots,X_{\pi(k)})|\sigma(\mu_t))(\omega)
$$

Kun summataan permutaatioiden π:n yli ja jaetaan niiden määrällä saadaan

$$
\mu_t^{\circ k}(f;\omega)=E_P(f(X_1,\dots,X_k)|\sigma(\mu_t))(\omega)
$$

Osoitamme seuraavaksi

$$
E_P(f(X_1,\dots,X_k)|\sigma(\mathcal{T}_{-t}))(\omega)=E_P(f(X_1,\dots,X_k)|\sigma(\mu_t))(\omega)
$$

Huomaamme myös että

$$
\mathcal{T}_{-t}=\sigma(\mu_t,\mu_{t+1},\mu_{t+2},\dots)=\sigma(\mu_t,X_{t+1},X_{t+2},\dots)
$$

koska empiiriset mitat $\mu_t(dx;\omega)$ ja $\mu_{t+1}(dx;\omega)$ määrävät $X_{t+1}(\omega)$ yhtälössä

$$
(\mu_{t+1}-\mu_t)(dx)=\frac{1}{t+1}\Big(\mathbf{1}(X_{t+1}\in dx)-\mu_t(dx)\Big)
$$

Then from infinite exchangeability it follows that in law, for $m\in\mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
&(X_1,X_2,\dots,X_n,X_{n+1},X_{n+2},\dots X_{n+m})\\
\overset{\mathcal{L}}{=}\;&(X_{\pi(1)},X_{\pi(2)},\dots,X_{\pi(n)},X_{n+1},X_{n+2},\dots X_{n+m})
\end{aligned}
$$

for any permutation π of $\{1,\dots,n\}$.

Esimerkki 19.1. *$(X_1,\dots,X_n)$ ja $(X_{n+1},X_{n+2},\dots)$ ovat ehdollisesti riippumattomia ehdolla $\sigma(\mu_n)$,*

R. *Huomataan ensin että satunnaismuuttuja $W(\omega)$ on $\sigma(\mu_n)$ mitaalinen jos ja vain jos $W(\omega) = g(X_1, \dots, X_n)$ jossa g on mitallinen ja symmetrinen, eli*

$$g(x_1, \dots, x_m) = g(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(m)}) \quad \forall \pi \text{ permutaatiolle} .$$

Oletaamme myös että g on rajoitettu.

Olkoon myös $Y(\omega)$ rajoitettu ja $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$-mitallinen, ja $f(x_1, \dots, x_n)$ rajoitettu $\mathcal{S}^{\otimes n}$ mitallinen, (ei välttämättä symmetrinen) Jonon äärettömästä vaihdettavuudesta seuraa $\forall n \in \mathbb{N}$ ja kaikille $\{1, \dots, n\}$ indeksien permutaatioille π, jonot

$$(X_1, X_2, \dots X_n, X_{n+1}, X_{n+1}, \dots) \overset{\mathcal{L}}{=} (X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \dots X_{\pi(n)}, X_{n+1}, X_{n+1}, \dots)$$

ovat samoin jakautuneita P-mitan suhteen

$$\begin{aligned}
&E_P(Y\ W\ f(X_1, \dots, X_n))E_P(Y\ g(X_1, \dots, X_n)\ f(X_1, \dots, X_n)) \\
&= E_P(Y\ g(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})\ f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})) \\
&\quad (\text{ koska jono on vaihdettavissa }) \\
&= E_P(Y\ g(X_1, \dots, X_n)\ f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})) = E_P(Y\ W\ f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})) \\
&\quad (\text{ koska } g \text{ on symmetrinen }) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\pi} E_P\Big(YWf(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})) = E_P\Big(YW \frac{1}{n!} \sum_{\pi} f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})\Big) \\
&= E_P\big(Y\ W\ \mu_n^{\circ n}(f)\big)
\end{aligned}$$

Ehdollinen odotusarvon määritelmästä seuraa että

$$E_P\big(f(X_1, \dots, X_n)\big|\sigma(\mu_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)\big)(\omega) = \mu_n^{\circ n}(f; \omega) = E_P\big(f(X_1, \dots, X_n)\big|\sigma(\mu_n)\big)(\omega)$$

eli $(X_1, \dots, X_n)$ ja $(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ ovat ehdollisesti P-rippumattomia ehdolla $\sigma(\mu_n)$.

Toisin sanoen, $\mathcal{T}_{-n}$ ei sisällä informatioota jono ensimmäisten n-arvojen järjesyksestä.

Koska $M_{-t}^{(k)}(f) := \mu_t^{\circ k}(f)$ on martingaali filtratiossa $(\mathcal{T}_{-t} : t \in \mathbb{N})$, Doobin takaperäisestä martingaalikonvergenssi lauseesta seuraa että kun $t \to \infty$, on olemassa rajaarvo $M_{-\infty}^{(k)}(f)$ P-melkein varmasti ja $L^1(P)$:ssa.

Koska $(X_1, \dots, X_k)$ saa arvot Borel avaruudessa, ehdollisella todennäköisyydellä

$$P((X_1, \dots, X_k) \in A | \mathcal{T}_{-\infty})(\omega), \quad A \in \mathcal{S}^{\otimes k}$$

on säännöllinen versio,

eli $\mathcal{T}_{-\infty}$-mitallinen todennäköisyysydin $\mu_{\infty}^{\circ k}(dx; \omega)$ on $(S_1 \times \cdots \times S_k)$ jolla P-melkein varmasti kaikille rajoitetuille ja mitalliseille funktioille

$$\begin{aligned}
M_{-\infty}^{(k)}(f; \omega) &= E_P(f(X_1, \dots, X_k) | \sigma(\mathcal{T}_{-\infty}))(\omega) \\
&= \int_{S_1, \dots, S_k} f(x_1, \dots, x_k) \mu_{\infty}^{\circ k}(dx_1, \dots dx_k; \omega)
\end{aligned}$$

Kun $k = 1$ merkitään $\mu_{\infty} = \mu_{\infty}^{\circ 1}$, jossa

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} f(X_i(\omega)) = \int_S f(x) \mu_{\infty}(dx, \omega) \qquad P\text{-m.v.}$$

Esimerkki 19.2. *Koska $(S, \mathcal{S})$ on Borelin avaruus, on olemassa mitallinen injektio $f : (S, \mathcal{S}) \to ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ jolla on mitallinen käänteiskuvaus f^{-1}. Tästä seuraa että kun $A \subseteq \mathcal{S}$, $A \in \mathcal{S}$ jos ja vain jos $f(A)$ on Borelin joukko. Koska*

$$\sigma\big\{(a,b] : 0 \leq a < b \leq 1,\ a,b \in \mathbb{Q}\big\} = \mathcal{B}([0,1])$$

seuraa että myös $\mathcal{S}$ on numeroituvasti generoitu, koska

$$\mathcal{S} = \sigma\big\{f^{-1}((a,b] \cap f(S)) : 0 \leq a < b \leq 1, a, b \in \mathbb{Q}\big\} = \sigma\big\{A(\ell) : \ell \in \mathbb{N}\big\}$$

A priori tiedetään että $\forall A \in \mathcal{S}$, $\exists \mathcal{N}_A \subseteq \Omega$ jolla $P(\mathcal{N}_A) = 0$ ja

$$\mu_t(A; \omega) \to \mu_\infty(A; \omega) \quad \forall \omega \notin \mathcal{N}_A$$

Koska $P(\mathcal{N}) = 0$ jossa $\mathcal{N} = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_{A(\ell)}$, seuraa että

$$\mu_t(A_\ell; \omega) \to \mu_\infty(A_\ell; \omega) \quad \forall \ell \in \mathbb{N} \quad \forall \omega \notin \mathcal{N}$$

ja koska $\sigma\{A_\ell : \ell \in \mathbb{N}\} = \mathcal{S}$ seuraa että $\forall A \in \mathcal{S}$

$$\mu_t(A; \omega) \to \mu_\infty(A; \omega) \quad \forall A \in \mathcal{S} \quad \forall \omega \notin \mathcal{N} \tag{19.1}$$

Samoin löytyy nolla mittainen joukko $\widetilde{\mathcal{N}} \subseteq \Omega$ jolla $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \{A_i\} \subseteq \mathcal{S}$

$$\mu_t^{\circ k}(A_1 \times \cdots \times A_k; \omega) \to \mu_\infty^{\circ k}(A_1 \times \cdots \times A_k; \omega) \quad \forall \omega \notin \widetilde{\mathcal{N}} \tag{19.2}$$

P-melkein varmasti äärellisulotteisten jakaumien kokoelma

$$\Big\{\mu_\infty^{\circ k}(dx_1, \ldots dx_k; \omega) : k \in \mathbb{N}\Big\}$$

on yhteensopiva (tarkista!), ja Kolmogorovin laajennuslauseesta 2.1 seuraa että on olemssa satunnaismitta $\boldsymbol{\nu}_\infty(\,\cdot\,; \omega)$ jonojen $(x_k : k \in \mathbb{N}) \subseteq S$ avaruudessa jolla $\forall k$, $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} &P\big(X_1 \in A_1, \ldots X_k \in A_k | \mathcal{T}_{-\infty}\big)(\omega) = \\ &\mu_\infty^{\circ k}(A_1 \times \cdots \times A_k; \omega) = \boldsymbol{\nu}_\infty\big(\big\{(x_l : l \in \mathbb{N}) : x_1 \in A_1, \ldots, x_k \in A_k\big\}; \omega\big) \end{aligned}$$

Näytän että P-melkein varmasti $\boldsymbol{\nu}_\infty(\cdot; \omega)$ on satunnaismitan kopioiden ääretön tulomitta, eli $\forall k$

$$P\big(X_1 \in A_1, \ldots X_k \in A_k | \mathcal{T}_{-\infty}\big)(\omega) = \prod_{i=1}^k P(X_1 \in A_i | \mathcal{T}_{-\infty})(\omega)$$

Olkoon $\mu_t^{\otimes k}$ k-kertainen tulomitta empiirisestä mitasta μ_t. Kun $f(x_1, \ldots, x_k)$ rajoitettu ja Borel mitallinen,

$$\mu_t^{\otimes k}(f) = t^{-k} \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq t} f(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$$

joka sisältää myös termeja joissa on toistettuja indekseja. Silloin

$$(\mu_t^{\circ k} - \mu_t^{\otimes k})(f) = \mu_t^{\circ k}(f) - \mu_t^{\otimes k}(f) =$$
$$\mu_t^{\circ k}(f)\left(1 - \frac{t!}{t^k(t-k)!}\right) + t^{-k} \sum_{1 \le i_1, \dots i_k \le t:\ \exists l \neq m\ i_l = i_m} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$$

jossa ensimmäisessä osassa on termeja ilman toistettuja indekseja ja toisessa osassa kaikissa termeissä vähintään yksi satunnaismuuttuja on toistettu. Silloin $\forall k \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega$,

$$|\mu_t^{\circ k}(f;\omega) - \mu_t^{\otimes k}(f;\omega)|$$
$$\le \| f \|_\infty \left(1 - \prod_{l=0}^{k-1} \frac{(t-l)}{t} + t^{-k}\binom{k}{2} t^{k-1}\right) \to 0 \text{ kun } t \to \infty$$

jossa $\| f \|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|$ ja arvio ei riipu ω:sta

Kaikille $A_1, A_2 \dots \in \mathcal{S}$, $\forall k$ P-melkein varmasti kun $t \to \infty$

$$\mu_t^{\circ k}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) \to \mu_\infty^{\circ k}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k)$$

ja kun $k = 1$

$$\mu_t^{\circ 1}(A_i) \to \mu_\infty(A_i),$$

kovergenssi seuraa myös tulomitoille

$$\mu_t^{\otimes k}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = \prod_{i=1}^{k} \mu_t^{\circ 1}(A_i) \to \prod_{i=1}^{k} \mu_\infty(A_i) = \mu_\infty^{\otimes k}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k).$$

Kolmio epäyhtälöstä

$$|\mu_{-\infty}^{\circ k}(f) - \mu_{-\infty}^{\otimes k}(f)|$$
$$\le |\mu_{-\infty}^{\circ k}(f) - \mu_t^{\circ k}(f)| + |\mu_t^{\circ k}(f) - \mu_t^{\otimes k}(f)| + |\mu_t^{\otimes k}(f) - \mu_\infty^{\otimes k}(f)| \to 0$$

P-m.v. kun $t \to \infty$, ja

$$\mu_\infty^{\circ k}(f;\omega) = \mu_\infty^{\otimes k}(f;\omega) \qquad P\text{-a.s}$$

kaikille rajoitetuille mitallisille $f(x_1, \dots, x_k)$. Se tarkoittaa Kolmogorovin laajennus $\boldsymbol{\nu}_\infty$ on tulomitta jonojen avaruudessa $S^{\mathbb{N}}$. Rajoitetuille mitalliselle funktiolle $g_1, \dots, g_k : S \to \mathbb{R}$

$$E_P(g_1(X_1) \dots g_k(X_k) | \mathcal{T}_{-\infty})(\omega) = \prod_{i=1}^{k} \left\{ \int_S g_i(x) \mu_\infty(dx, \omega) \right\}$$

Ottaamalla odotusarvoa seuraa

$$E_P(g_1(X_1) \dots g_k(X_k))$$
$$= E_P\left(\int_S g_i(x) \mu_\infty(dx) \right) = \int_{\mathcal{M}(S)} \left\{ \prod_{i=1}^{k} \int_S g_i(x) \mu(dx) \right\} Q(d\mu)$$

jossa Q on satunnaismitan $\mu_\infty(dx;\omega)$ jakauman avaruudessa

$$\mathcal{M}(S) = \{ \text{ todennäköisyys mittoja } \nu : \mathcal{S} \to [0,1] \ \}$$

Toisin sanoen, permutaatio-symmetrinen (eli äärettömasti vaihdettavissa) satunnaismuuttujen jono joka saa arvot Borelin avaruudessa, on riippumattomien ja samoin jakautuneiden jonojen sekoitus □

Esimerkki 19.3. *De Finetti todisti ensin lauseensa yksinkertaisimmissa tapauksessa, binaarijonoille, jossa* $S = \{0,1\}$. *Silloin* $\mathcal{M}(S) = [0,1]$.

Olkoon $S_t(\omega) = (X_1(\omega) + \cdots + X_t(\omega))$.

Jos kolikkoheittojenjono on äärettömästi vaihdettavissa P-mitan suhteen, raja-arvo $\vartheta(\omega) := \lim_{t\to\infty} t^{-1} S_t(\omega) \in [0,1]$ *on olemassa P-melkein varmasti ja* $L^1(P)$*:ssa .*

Olkoon $Q(d\theta) = P(\{\omega : \vartheta(\omega) \in d\theta\})$. *Kun ehdollistetaan σ-algebraan $\sigma(\vartheta)$, kolikonheitot ovat ehdollisesti riippumattomia ja Bernoulli jakautuneita, samalla satunnais-todennäköisyysparametrilla* $\vartheta(\omega) \in [0,1]$. *Raja-arvon todennäköisyysmitta* $Q(d\theta)$ *tulkitaan prioritodennäköisyydeksi parametrille* ϑ. *Silloin* $\forall k$, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \{0,1\}$,

$$P\big(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k\big) = \int_0^1 \left\{ \prod_{i=1}^k P(X_1 = x_i | \vartheta = \theta) \right\} Q(d\theta)$$

$$\int_0^1 \theta^{S_k}(1-\theta)^{(k-S_k)} Q(d\theta)$$

$$Q(B) = P\big(\{\omega : \lim_{t\to\infty} t^{-1} S_t(\omega) \in B\}\big), \quad B \in \mathcal{B}([0,1])$$

De Finettin lause on avain Bayeslaiseen päättelyyn.