Stokastiikka , Syksy 2010, Harjoitustehtävät 12

1. Laske karakteristinen funktio $\varphi_X(t) = E_P(\exp(itX))$ kun
   - X on tasaisesti jakautunut välissä $[0, 1]$.
   - X on tasaisesti jakautunut välissä $[-1, 1]$.
   - X on Cauchy jolla on tiheysfunktio $f_X(x) = ((1 + x^2)\pi)^{-1}$.

2. Sanotaan että satunnaismuuttujan X jakauma on äärettömasti jaettavissa (infinitely divisible) jos kaikille $n \in N$ on olemassa satunnaismuuttuja $Y_1^{(n)}$ jolla X ja $Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}$ ovat samoin jakautuneita, jossa $Y_i^{(n)}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita.

   Osoita:
   - X on äärettömasti jaettavissa jos ja vain jos kaikille $n \in \mathbb{N}$ kuvaus $t \mapsto \varphi_X(t)^{1/n}$ on karakteristinen funktio.
   - gaussinen jakauma $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ on äärettömästi jaettavissa.
   - Poissonin jakauma paramterilla $\lambda > 0$ on äärettömästi jaettavissa.

3. Olkoon $\varphi_X(t)$ satunnaismuuttujan $X(\omega)$ karakteristinen funktio. Osoita että φ_X on positiivinen definiitti, eli

   $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i \bar{c}_j \varphi_X(t_i - t_j) \geq 0$$

   kaikille $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$. $\bar{c}$ on kompleksi konjugaatti.

4. Sanotaan että satunnaismuuttujan X jakauma on vaaka, silloin kun kaikille $a, b \in \mathbb{R}$ $(aX_1(\omega) + aX_2(\omega))$ on samoin jakautunut kuten $(cX(\omega) + d)$ jollekin $c, d \in \mathbb{R}$, jossa X_i $i = 1, 2$ ovat riippumattomia ja jakautuneita kuten X.
   - Osoita että gaussinen jakauma $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ on vaaka.
   - Osoita että jos karakteristinen funktio on muotoa

     $$\varphi_X(t) = \exp(it\mu - |\beta t|^\alpha)$$

     jakauma on vaaka.

5. Olkoon $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. satunnaismuuttujat joilla on tiheysfunktio

   $$f_X(x) = \frac{(1 - \cos x)}{\pi x^2}.$$

   - Tarkista että $f_X(x)$ on todennäköisyysjakauman tiheysfunktio.
   - Osoita

     $$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \leq x\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x)$$