

Stokastikka I, harjoitustehtävät 8, syksy 2010

1. Todennäköisyysavaruudella (Ω, \mathcal{F}, P) olkoon $\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ riippumattomia ja samoin jakautuneita jossa

$$P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) = p \in (0, 1) .$$

Olkoon $S_n(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega) \quad n \in \mathbb{N}$.

Olkoon $p < a < 1$. Osoita suurten poikkeamien yläraja:

$$\begin{aligned} P(S_n > an) &\leq \left(\frac{p}{a}\right)^{na} \left(\frac{1-p}{1-a}\right)^{n(1-a)} \\ &= \exp\left\{-n\left(a \log\left(\frac{a}{p}\right) + (1-a) \log\left(\frac{1-a}{1-p}\right)\right)\right\} \\ &= \exp\{-nK(P_a|P_p)\} \end{aligned}$$

jossa (tiedoksi vaan, tätä tietoa ei tarvitse käyttää)

$$K(P_a|P_p) := \sum_{\omega=0,1} P_a(\{\omega\}) \log\left(\frac{P_a(\{\omega\})}{P_p(\{\omega\})}\right)$$

on P_p :n suhteellinen entropia P_a :n suhteen.

Vihje: kun $\theta > 0$

$$P(S_n > an) = P(\exp(\theta S_n) > \exp(\theta an))$$

Käytetään ensin Chebychevin epäyhtälöä ja sitten optimoidaan θ :n suhteen.

2. Olkoon $\bar{S}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ jossa X_i ovat P -riippumattomia ja samoin jakautuneita.

Laske Cramerin lauseen avulla

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{S}_n > x)$$

silloin kun

- $X_1(\omega)$ on 1-eksponentiaalinen, eli $P(X_t > x) = \exp(-x)$ kun $x \geq 0$. Huomaat että $E_P(X_1) = 1 > 0$
- $X_1(\omega) = G(\omega)^2$ jossa $G(\omega)$ on standardi gaussinen, $E_P(G) = 0$, $E_P(G^2) = 1$.
- $X_1(\omega)$ on Poisson(λ) jakautunut, eli

$$P(X_1 = k) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{kun } k \in \mathbb{N}$$

3. Olkoon $U(\omega)$ tasaisesti jakautunut $[0, 1]$ välissä, ja $(X_i : i \in \mathbb{N})$ jono ehdollisesti riippumattomia satunnaismuuttujia σ -algebran $\sigma(U)$:n ehdolla, jolla $\forall n, f_1, \dots, f_n$

$$E_P(f_1(X_1) \dots f_n(X_n) | \sigma(U))(\omega) = \left\{ \prod_{i=1}^n E_P(f_i(G + u)) \right\} \Big|_{u=U(\omega)}$$

jossa G on standardi gaussinen jolla $E(G) = 0, E(G^2) = 1$. Toisin sanoen, X_i ovat ehdollisesti riippumattomia ja gaussisia samalla ehdollisella odotusarvolla $U(\omega)$ ja ehdollisella varianssilla 1.

Olkoon $\bar{S}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.

Laske

$$\lim_n -\frac{1}{n} \log P(\bar{S}_n > x)$$

Vihje Laske ensin

$$\lim_n -\frac{1}{n} \log P(\bar{S}_n > x | U = u)$$

ja huomaat että

$$P(\bar{S}_n > x) = \int_0^1 P(\bar{S}_n > x | U = u) du$$

Olkoon $I(x|U = u)$ ehdollisen jakauman vauhti funktio

Käytä Taylorin approksimaatiota: kun $u \in [0, 1]$

$$I(x|u) \sim I(x|U = \hat{u}_x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial^2 u} I(x|U = u) \Big|_{u=\hat{u}_x} (u - \hat{u}_x)^2$$

jossa

$$\hat{u}_x = \arg \min_{u \in [0,1]} I(x|u)$$

4. Osoita että kun $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$h\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{h(x) + h(y)}{2}$$

$h(x)$ on konvekksi. (Emme oleta että h olisi ei-vähenevä!)