

Stokastiikka , Syksy 2010, Harjoitustehtävät 10

1. Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ riippumattomien satunnaismuuttujien jono, jossa

$$P(X_j = k) = \exp(-\lambda_j) \frac{\lambda_j^k}{k!}$$

siis X_j on Poisson(λ_j) jakautunut jossa $\lambda_j > 0$.

Oletamme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n} = \lambda \in (0, +\infty)$$

Osoita että satunnaismuuttujien jono

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n - (\lambda_1 + \dots + \lambda_n))$$

suppenee jakauman mielessä ja määrää rajajakauma. **Vihje:** muista Lindebergin keskeinen raja-arvo lause

2. Olkoon $X_k, k = 0, 1$ riippumattomia ja standardi gaussisia, jolla $E(X_i) = 0$ ja $E(X_i^2) = 1$.

Osoita että $Y = \frac{X_0 + X_1}{\sqrt{2}}$ on standardi gaussinen laskemalla tiheysfunktioiden konvoluutiota:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) \phi(x) \phi(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} h(x) \phi(x) dx$$

jossa $h(x)$ on testifunktio ja $\phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}x^2)$ on standardi gaussinen tiheysfunktio.

Vihje Muuttujan vaihdolla.

3. Todennäköisyys avaruudessa ($\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$), olkoon

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{l} \text{todennäköisyys mitat } Q \text{ jolla} \\ E_Q(X) = \int_{\mathbb{R}} x Q(dx) = 0, E_Q(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 Q(dx) = 1 \end{array} \right\}$$

Kun $Q \in \mathcal{P}$ määritellään kuvaus $T : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ jolla

$$(TQ)(B) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) Q(dx) Q(dy) = E_{Q \otimes Q}\left(\mathbf{1}_B\left(\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}\right)\right), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

jossa X_1 ja X_2 ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita jakaumalla Q .

Osoita että standardi gaussinen jakauma $\gamma(dx)$ on T kuvauksen kiinteä piste eli $T\gamma = \gamma$, ja on attraktiivien \mathcal{P} joukossa, eli

$\forall Q \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T^n Q)(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

4. Todennäköisyysvaruudessa (Ω, \mathcal{F}, P) , olkoon $N_\lambda(\omega)$ Poisson(λ) jakautunut, jossa $\lambda > 0$, siis

$$P(N = k) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$$

ja $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien jono jossa

$$P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = p \in (0, 1)$$

- Olemme jo laskeneet $E_P(X_n) = \lambda$ ja $E_P(X_n^2) = \lambda^2 + \lambda$.

Oletamme $N_\lambda(\omega) \stackrel{P}{\perp\!\!\!\perp} (X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$

Olkoon

$$S_n(\omega) = X_1 + \dots + X_n(\omega) \text{ ja}$$

$$S_{N_\lambda(\omega)}(\omega) = X_1 + \dots + X_{N_\lambda(\omega)}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(X_k(\omega) \mathbf{1}(X_k(\omega) \leq N_\lambda(\omega)) \right),$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu ja jatkuva testifunktio, ja $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ standardi gaussinen satunnaismuuttuja.

- Osoita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_P \left(f \left(\frac{S_{N_\lambda} - pN_\lambda}{\sqrt{N_\lambda p(1-p)}} \right) \middle| N_\lambda = n \right) = E_P(f(G))$$

jossa ehdollinen odotusarvo on elementaarinen, siinä mielessä että ehdollistetaan tapahtumaan jolla on positiivinen todennäköisyys. Muista keskeinen raja-arvo lause

- Osoita:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_P \left(f \left(\frac{S_{N_\lambda} - pN_\lambda}{\sqrt{N_\lambda p(1-p)}} \right) \middle| \sigma(N_\lambda) \right) (\omega) \xrightarrow{P} E_P(f(G))$$

jossa λ on satunnaismuuttujan $N_\lambda(\omega) : n$ Poissonin parametri ja suppeneminen on stokastinen konvergenssin mielessä.

- Osoita

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_P \left(f \left(\frac{S_{N_\lambda} - pN_\lambda}{\sqrt{N_\lambda p(1-p)}} \right) \right) = E_P(f(G))$$

Muista $L^1(P)$ konvergenssin karakterisaatio.

Vihje Jos haluat käyttää melkein varmaa konvergenssia tarvittaessa voit olettaa että on olemassa satunnaismuuttujien kokoelma $\{N_\lambda(\omega) : \lambda > 0\}$, jossa P : mitan suhteen $N_\lambda(\omega)$ on Poisson(λ)-jakautunut, ja $\lim_{\lambda \uparrow \infty} N_\lambda(\omega) = +\infty$ P -melkein varmasti.