

Stokastiikka , Syksy 2010, Harjoitustehtävät 11

1. Olkoon $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ i.i.d. satunnaismuuttujat kertymäfunktioilla $F(t) = P(X_1 \leq t)$.

Otoksen (X_1, \dots, X_n) Empiirinen jakauma on satunnaisprosessi

$$F_n(t, \omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(X_i(\omega) \leq t) \quad n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$$

- Osoita: $E_P(F_n(t)) = F(t)$.
- : osoita $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$F_n(t, \omega) \rightarrow F(t)$$

P m.v. kun $n \rightarrow \infty$.

2.iii Todista Glivenko-Cantelli lemma

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t, \omega) - F(t)| \rightarrow 0$$

P m.v. kun $n \rightarrow \infty$.

Vihje osoita ensin että

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t, \omega) - F(t)| = \sup_{q \in \mathbb{Q}} |F_n(t, \omega) - F(t)|$$

F_n ja F ovat oikelta jatkuvia.

Huomataan että kun $a \leq t \leq b$,

$$F_n(a) - F(a) + F(a) - F(b) \leq F_n(t) - F(t) \leq F_n(b) - F(b) + F(b) - F(a)$$

josta seuraa

$$|F_n(t) - F(t)| \leq |F_n(b) - F(b)| \wedge |F_n(a) - F(a)| + |F(b) - F(a)|$$

- Laske kovarianssi

$$\text{Cov}(F_n(t), F_m(s)) = E_P\{(F_n(t, \omega) - F(t))(F_m(s, \omega) - F(s))\}$$

for $n, m \in \mathbb{N}, t, s \in \mathbb{R}$.

- Osoita että $\sqrt{n}(F_n(t) - F(t)) \xrightarrow{d} G(t)$ jossa $G(t)$ on gaussinen. Mitkä ovat $E(G(t)), E(G(t)^2)$?

2. Olkoon X_n binomi jakautunut parametrilla p_n jossa $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$.

Osoita että $X_n \xrightarrow{d}$ Poisson(λ).

Vihje: Osoita että kinteälle k

$$P_n(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \rightarrow \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} = P(X = k)$$

jossa X on Poisson jakautunut. Perustele miksi tästä seuraa konvergenssi jakauman mielessä.