Stokastikka II, harjoitustehtävät 9 syksy 2010
("Pelkistetystä" suurten poikkeamien periatteesta)
Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyys avaruus, ja satunnaismuuttuja $X(\omega)$ jolla $X^+ := \max(X, 0) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Muistetaan että $X^+ \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jos ja vain jos

$$x^* := \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} X(\omega) := \inf\{r : P(X > r) = 0\} < \infty$$

jossa esssup$X(\omega)$ on ollenainen supremum P-mitan suhteen.
Kun $A \in \mathcal{F}$ määritellään myös

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in A} X(\omega) = \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega}\big(X(\omega) + \log(\mathbf{1}_A(\omega))\big) =$$
$$\inf\{r : P(\{X > r\} \cap A) = 0\}$$

Osoita

1. $x^* = \text{esssup}_{\omega\in\Omega} X(\omega)$ jos ja vain jos $P(X > x^*) = 0$ ja on olemassa jono $\xi_n \uparrow x^*$ jolla $\varepsilon_n := P(X > \xi_n) > 0$.

2. Kun $x^* < \infty$,

$$C(n) := E_P\big(\exp(nX_t)\big) < \infty \quad \forall n \geq 0$$

3. Määritellään Esscher-muunnettu todennäköisyysmittojen jono

$$P_n(d\omega) = C(n)^{-1}\exp(nX(\omega))P(d\omega), \text{ jolla}$$
$$P_n(A) = \frac{E_P(\exp(nX)\mathbf{1}_A)}{E_P(\exp(nX))} \quad \text{kun } A \in \mathcal{F}$$

Osoita

$$x^* := \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} X(\omega) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(C(n)) =$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\int_\Omega \exp(nX(\omega)P(d\omega)\right)$$

Vihje Huomaat että

$$\exp(nx^*) \geq \exp(nX(\omega)) \geq \exp(n\xi_n)\mathbf{1}(X(\omega) > \xi_n) \qquad P \text{ m.v.}$$

4. Osoita: Todennäköisyysmittojen jonolle $(P_n : n \geq 0)$ päätee suurten poikkeamien periaate vauhti funktiolla

$$I(\omega) := (x^* - X(\omega))$$

eli kaikille $\forall A \in \mathcal{F}$ jossa $P(A) > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(P_n(A)) = \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in A}(X(\omega) - x^*) = -\operatorname*{ess\,inf}_{\omega\in A} I(\omega) \tag{0.1}$$

Huomautus (0.1) pätee myös kun $P(A) = 0$, koska

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in A} X(\omega) = -\infty$$

5. Kun $X \in L^\infty(P)$ ja $X(\omega) \geq 0$ P-melkein varmasti,

$$x^* = \lim_{n\to\infty} E_P\big(X^n\big)^{1/n}$$

Vihje $Y(\omega) := \log(X(\omega))$, $Y^+ \in L^\infty(P)$.

6. Kun $X(\omega) \in L^\infty(P)$,

$$\| X \|_\infty = \mathrm{esssup}_{\omega\in\Omega}|X(\omega)| = \lim_{n\to\infty} E_P\big(|X|^n\big)^{1/n} = \lim_{p\to\infty} \| X \|_p$$