Stokastiikka II , Syksy 2010, kotitentti

Voit palauttaa tentisi loppiaisen jälkeen. $i = \sqrt{-1}$ merkitse imaginaarinen yksikkö.

1. Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ satunnaismuuttujen jono todennäköissysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

   Osoita: kun c on deterministinen vakio,

   $X_n \stackrel{d}{\to} c$ (jakauman mielessä),

   jos ja vain jos $X_n \stackrel{P}{\to} c$ (stokastisesti).

2. Olkoon X_1 satunnaismuuttujja jolla $P(X_1 > x) = \exp(-x)$, kun $x \geq 0$ Huomataan että $E_P(X_1) = 1$, $E_P(X_1^2) = 2$.

   - Laske karakteristinen funktio $\varphi_X(t) := E_P(\exp(itX_1))$.
   - Laske kumulantti generoiva funktio $\Lambda(t) = \log E_P(\exp(tX_1))$. Milloin $\Lambda(t) < +\infty$?
   - Laske sen Legendre muunnos.

   $$\Lambda^*(x) = \sup_t \bigl\{ xt - \Lambda(t) \bigr\}$$

   - Olkoon $x > 1 = E_P(X)$. Laske mitan exponentiaalinen mitan vaihto parametri t^* jolla $E_{P^*}(X_1) = x$, kun valitaan

   $$P^*(X_1 \in B) := E_P\bigl(\exp(t^* X_1 - \Lambda(t^*))\mathbf{1}_A\bigr).$$

   - Olkoon $(X_i : i \in \mathbb{N})$ riippumattomia ja samoin jakautuneita, kuten X_1, ja $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)$. Laske

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(S_n \geq nx)$$

   kun $x \geq E_P(X) = 1$. (Muista Cramerin suurten poikkeamien lause).

   - Olkoon

   $$\widehat{S}_n(\omega) := \frac{1}{\sqrt{n}}(S_n(\omega) - n)$$

   josta on vähennetty odotusarvo ja sitten skalattu siten että $E_P(\widehat{S}_n) = 0$ ja $E_P(\widehat{S}_n^2) = 1$. Laske karateristinen funktio

   $$\varphi_{\widehat{S}_n}(t) := E_P(\exp(itn^{-1/2}(S_n - n))$$

   - Laske $\lim_{n\to\infty} \varphi_{\widehat{S}_n}(t)$.

   Vihje : Voit laskea suoraan, tai epäsuoraasti kun muistat keskeisen raja-arvon lauseetta. Muistetaan myös että kun G on gaussinen jolla $E(G) = 0, E(G^2) = 1$,

   $$\varphi_G(t) := E_P(\exp(itG)) = \exp\bigl(-\frac{t^2}{2}\bigr)$$

   Jos ajot laskea suoraan karakteristisen funktion raja-arvo, kirjoita $\log(\varphi_{\widehat{S}_n}(t))$ ja käytä logaritmin Taylorin kehitelmää.

- Näytä että $\widehat{S}_n$ suppenee jakauman mielessä kohti gaussista jakaumaa.
- $\widehat{S}_n$ ei kuitenkin suppene stokastisesti. (Muistatko miksi ?). Selitä miten löytyy todennäköisyysavaruus $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{P})$ ja siinä määriteltyt satunnaismuuttujat $(\widetilde{S}_n(\widetilde{\omega}) : n \in \mathbb{N})$ ja gaussinen $\widetilde{G}(\widetilde{\omega})$ jolla

  $$\widetilde{P}\big(\{\widetilde{\omega} : \widetilde{S}_n(\widetilde{\omega}) \le x\}\big) = P\big(\{\omega : \widehat{S}_n(\omega) \le x\}\big)$$

  ja

  $$\lim_{n\to\infty} \widetilde{S}_n(\widetilde{\omega}) = \widetilde{G}(\widetilde{\omega})$$

  $\widetilde{P}$-melkein varmasti $\widetilde{\Omega}$ avaruudessa.
  Vihje Muista Skorokhodin esitys.

3. Olkoon satunnaismuuttuja $N_\theta(\omega)$ Poisson(θ) jakautunut jossa $\theta > 0$, siis

$$P(N_\theta = k) = \exp(-\theta)\frac{\theta^k}{k!}$$

Muistetaan että $E_P(N_\theta) = \theta$.

- laske karakteristinen funktio

  $$\varphi_{N_\theta}(t) = E_P(\exp(itN_\theta))$$

- Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujat, karakteristisella funktiolla $\varphi_{X_1}(t) := E_P(\exp(itX_1))$. Olkoon

  $$Y_\theta(\omega) = \sum_{k=1}^{N_\theta(\omega)} X_k(\omega)$$

  Laske karakteristinen funktio

  $$\varphi_{Y_\theta}(t) = E_P\big(\exp(itY_\theta)\big).$$

  Vihje

  $$E_P\big(\exp(itY_\theta)\big) = E_P\Big(E_P\big(\exp(itY_\theta)\big|\sigma(N_\theta)\big)\Big)$$

- Oletamme että $E_P(X_k) = 0$ ja $E_P(X_k^2) = 1$. Keskeisen raja-arvo lauseesta seuraa että

  $$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_1}(tn^{-1/2})^n \to \exp\big(-\frac{t^2}{2}\big)$$

  Osoita:

  $$\lim_{\theta\to\infty} \frac{Y_\theta}{\sqrt{N_\theta}} \xrightarrow{d} G$$

  (jakauman mielessä) jossa G on gaussinen ja $E(G) = 0$. Laske myös $E(G^2)$.

- Osoita:

$$\lim_{\theta \to \infty} \frac{Y_\theta}{\sqrt{\theta}} \xrightarrow{d} G$$

(jakauman mielessä) jossa G on gaussinen ja $E(G) = 0$. Laske myös $E(G^2)$.

Vihje Osoita että $\frac{N_\theta}{\theta} \xrightarrow{P} 1$ todistamalla Slutskyn lemman :

jos $X_n \xrightarrow{d} X$ ja $Y_n \xrightarrow{d} c$ jakauman mielessä jossa c on vakio, seuraa että $(X_n Y_n) \xrightarrow{d} Xc$. Slutskyn lemman välivaiheessa osoitetaan satunnaisvektoreille $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, c)$, riippumatta satunnaisparin (X_n, Y_n) riippuuvuusrakenteesta.