Stokastiikka , Syksy 2010, Harjoitustehtävät 11 , raktaisut

1. Olkoon $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ i.i.d. satunnausmuuttujat kertymäfunktiolla $F(t) = P(X_1 \leq t)$.

   Otoksen $(X_1, \dots, X_n)$ Empiirinen jakauma on satunnaisprosessi

$$F_n(t, \omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}(X_i(\omega) \leq t) \qquad n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}$$

- Osoita: $E_P(F_n(t)) = F(t)$. **R**: suoraan odotusarvon lineaarisuudesta.
- : osoita $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$F_n(t, \omega) \to F(t)$$

P m.v. kun $n \to \infty$.
R: Koska $E_P(\mathbf{1}(X_1 \leq t)) = F(t)$ väite seuraa Kolmogorovin suurten lukujen laista.
2.iii Todista Glivenko-Cantelli lemma

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t, \omega) - F(t)| \to 0$$

P m.v. kun $n \to \infty$.
Vihje osoita ensin että

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t, \omega) - F(t)| = \sup_{q \in \mathbb{Q}} |F_n(t, \omega) - F(t)|$$

F_n ja F ovat oikelta jatkuvia.
Huomataan että kun $a \leq t \leq b$,

$$F_n(a) - F(a) + F(a) - F(b) \leq F_n(t) - F(t) \leq F_n(b) - F(b) + F(b) - F(a)$$

josta seuraa

$$|F_n(t) - F(t)| \leq |F_n(b) - F(b)| \wedge |F_n(a) - F(a)| + |F(b) - F(a)|$$

R. Koska $F_n(t)$ ja $F(t)$ ovat oikealta jatkuvia,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t, \omega) - F(t)| = \sup_{q \in \mathbb{Q}} |F_n(q, \omega) - F(q)|$$

joka on $\mathcal{F}$-mitallinen, eli satunnaismuuttuja.
Kun $\varepsilon > 0$ löytyy $-\infty = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} = +\infty$, $m \in \mathbb{N}$ jolla $F(t_{i+1}) - F(t_i) \leq \varepsilon$ $\forall i = 0, 1, \dots, m$.
Tästä seuraa

$$\max_{i=1,\dots,m} |F_n(t_i, \omega) - F(t_i)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t, \omega) - F(t)| \leq \max_{i=1,\dots,m} |F_n(t_i, \omega) - F(t_i)| + \varepsilon$$

Tästä seuraa että P-m.v.

$$\limsup_{n \to \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t, \omega) - F(t)| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

- Laske kovarianssi

  $$\mathrm{Cov}(F_n(t), F_m(s)) = E_P\big\{\big(F_n(t,\omega) - F(t)\big)\big(F_m(s,\omega) - F(s)\big)\big\}$$

  jossa $n, m \in \mathbb{N}$, $t, s \in \mathbb{R}$. .

  $$E_P\big(\mathbf{1}(X_i \le t)\mathbf{1}(X_i \le s)\big) = E_P\big(\mathbf{1}(X_i \le t \wedge s)\big) = F(t \wedge s)$$

  ja

  $$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{1}(X_i \le t), \mathbf{1}(X_i \le s)) = F(t \wedge s) - F(t)F(s)$$

  Seuraa kun $s \le t$

  $$\mathrm{Cov}(F_n(t), F_m(s)) = \frac{n \wedge m}{nm} F(s)(1 - F(t))$$

- Osoita että $\sqrt{n}(F_n(t) - F(t)) \xrightarrow{d} X(t)$ jossa $X(t)$ on gaussinen. Laske $E(X(t)^2)$.

  Koska $\mathbf{1}(X_i \le t) - F(t)$:lla on odotusarvo 0 ja varianssi $F(t)(1 - F(t))$, ja (X_i) on i.i.d. jono seuraa keskeisen rajaarvon lauseesta että $\sqrt{n}(F_n(t) - F(t)) \xrightarrow{d} X(t)$ (jakauman mielessä, ei missään nimessä stokastisesti) jossa $X(t)$ on gaussinen jolla $E_P(X(t)) = 0$ ja $E_P(X(t)^2) = F(t)(1 - F(t))$.

2. Olkoon X_n binomi jakautunut parametrilla p_n jossa $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. Osoita että $X_n \,\overrightarrow{d}\,$ Poisson(λ).

   Vihje: Osoita että kinteälle k

   $$P_n(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^{1-k}(1 - p_n)^{n-k} \to \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} = P(X = k)$$

   jossa X on Poisson jakautunut. Perustele miksi tästä seuraa konvergenssi jakauman mielessä.

   R.

   $$\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n}\frac{1}{k!}\big(np_n\big)^k \left(1 - \frac{(n-k)p_n}{(n-k)}\right)^{n-k}$$

   Muistetaan että $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n = \lambda$.

   Kun k on kiinteä ja $n \to \infty$, $np_n \to \lambda$, $\frac{(n-k)}{n} \to 1$, $(n-k) \to \infty$, josta seuraa

   $$\lim_{n\to\infty} P_n(X_n = k) = \frac{1}{k}\lambda^k \exp(-\lambda)$$

   joka on $P(X = k)$ kun X on Poisson(λ) jakautunut.

Vaihtoisesti, karakteristisen funktion kautta:

$$
\begin{aligned}
&E_P(\exp(itX_n)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(\exp(it)p_n\big)^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \Big(\exp(it)p_n + (1-p_n)\Big)^n = \Big(1 - \frac{np_n(\exp(it)-1)}{n}\Big)^n \\
&\to \exp\big(-\lambda(e^{it}-1)\big) = E_P(\exp(itX)) \quad \text{kun } n \to \infty
\end{aligned}
$$

kun X on Poisson(λ) jakautunut.