Stokastiikka I, Syksy 2010, Tenttin malliratkaisut (24.11.2010)

1. Olkoon $X_n(\omega), n \in \mathbb{N}$ ja $X(\omega)$ satunnaismuuttujat jolla $X_n \xrightarrow{P} X$ stokastisen konvergenssin mielessä

   - Todista että on olemassa alijono n_k jolla $X_{n_k}(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti kun $k \to \infty$.

     Vihje: valitse alijono n_k siten että Borel Cantelli lemma astuisi voimaan.

     R. Olkoon m kiinteä, n_k kasvava jono jolla $P(|X_n - X| > m^{-1}) < 2^{-k}$ kun $n \geq n_k$. Borel Cantelli lemmasta

     $$\begin{aligned} &P(\{|X_{n_k} - X| > m^{-1} \text{ äärettömän monelle } k\ \}) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \\ &\iff P(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{|X_{n_k} - X| > m^{-1} \text{ äärettömän monelle } k\ \}) = 0 \\ &\iff P(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{|X_{n_k} - X| \leq m^{-1} \text{ kun } k \text{ on tarpeeksi suuri }\}) = 1 \\ &\iff P(\{\omega : \lim_k X_{n_k}(\omega) = X(\omega)) = 1 \end{aligned}$$

   - Sanotaan että jono $(X_n(\omega))$ on stokastisesti Cauchy kun $\forall \delta, \varepsilon > 0$ on olemassa N jolla kaikille $m, n \geq N$

     $$P\big(\omega : |X_n(\omega) - X_m(\omega)| \geq \delta) < \varepsilon$$

   - Osoita että jos $X_n \xrightarrow{P} X$, silloin jono (X_n) on stokastisesti Cauchy.

     R. Kolmio epäyhtälöstä :

     $$|X_n(\omega) - X_m(\omega)| \leq |X_n(\omega) - X(\omega)| + |X_n(\omega) - X(\omega)|$$

     Muistetaan että $X_n \xrightarrow{P} X$ jos ja vain jos $E_P(|X_n - X| \wedge 1) \to 0$.

     $$\begin{aligned} &E_P(|X_n - X_m| \wedge 1) \leq E_P((|X_n - X| + |X - X_m|) \wedge 1) \\ &\leq E_P((|X_n - X| \wedge 1) + E_P(|X - X_m|) \wedge 1) \to 0 \end{aligned}$$

     kun $n, m \to \infty$,

     Chebychevin epäyhtälöstä seuraa kun $0 < \varepsilon \leq 1$

     $$P(|X_n - X_m| > \varepsilon) \leq \varepsilon E_P(|X_n - X_m| \wedge 1)$$

   - Oletamme nyt että jono (X_n) on stokastisesti Cauchy. Osoita että on olemassa alijono (n_k) jolla $(X_{n_k}(\omega))$ on Cauchy jono P-melkein varmasti.

     R Koska (X_n) on stokastisesti Cauchy on olemassa alijono X_{n_k} jolla

     $$P(|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}| > 2^{-k}) \leq 2^{-k}$$

     Borel Cantelli lemmasta seuraa

     $$P(\omega : |X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)| > 2^{-k} \text{ ääretömän monelle } k\ ) = 0$$

josta seuraa

$$P(\omega : |X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)| \le 2^{-k} \text{kun } k \text{ on tarpeeksi suuri }) = 1$$

$$\implies P(\omega : \text{ sarja } \sum_{k=0}^{\infty} X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega) \text{ suppenee absoluttisesti }) = 1$$

Olkoon $X(\omega) := \limsup_N \sum_{k=0}^{N} (X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega))$, jossa $X_0 = 0$. Koska sarja suppenee absoluttiseti P-m.v. seuraa että $X_{n_k}(\omega) \to X(\omega)$ P-m.v., ja P m.v. $\{X_{n_k}(\omega)\}$ on Cauchy jono.

- Osoita että jos jono (X_n) on stokastisesti Cauchy on olemassa satunnaismuuttuja $X(\omega)$ jolla $X_n \xrightarrow{P} X$.
  Vihje: Olkoon $X(\omega) := \limsup_k X_{n_k}(\omega)$. Koska Cauchy jonolla $\mathbb{R}$:ssa on raja-arvo, seuraa että $X_{n_k}(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti.
  Osoittakseen että koko jono $X_n \xrightarrow{P} X$ suppenee stokastisesti, käytä kolmion epäyhtälö

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| \le |X_n(\omega) - X_{n_k}(\omega)| + |X_{n_k}(\omega) - X(\omega)|$$

2. Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ satunnaismuuttujen jono.
   Häntä σ-algebra on

$$\mathcal{T}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma(X_k : k \ge n)$$

- Selitä miksi $\mathcal{T}_\infty$ on σ-algebra.
  R. σ-algebroiden leikkaus on σ-algebra.

  Muistetaan Kolmogorovin 0-1 laki: Kun satunnaismuuttujat (X_n) ovat riippumattomia P-mitan suhteen, häntä σ-algebra on P-triviaali, eli $A \in \mathcal{T}_\infty \implies P(A) = 0$ tai $P(A) = 1$.

  Oletamme nyt että (X_n) ovat P-riippumattomia ja $X_n \xrightarrow{P} X$ stokastisen konvergenssin mielessä.
- Osoita että $X(\omega)$ on deterministinen, siis on olemassa $c \in \mathbb{R}$ jolla $P(X = c) = 1$.

On olemassa alijono $X_{n_k}(\omega)$ jolla $X_{n_k}(\omega) \to X(\omega)$ P m.v.

Olkoon $\widetilde{X}(\omega) := \limsup_k X_{n_k}(\omega)$. Seuraa että $\widetilde{X}(\omega)$ on $\mathcal{T}$-mitallinen ja $X(\omega) = \widetilde{X}(\omega)$ P-m.v.

$\forall t \in R$, Kolmogorovin 0-1 laista seuraa

$$P(X \le t) = P(\widetilde{X} \le t) \in \{0, 1\}$$

Koska $t \mapsto P(X \le t)$ on ei-vähenevä seuraa $P(X = c) = 1$ jossa $c = \inf\{t : P(X \le t) = 1\}$.

3. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon Olkoon $X(\omega), Y(\omega) \in \mathbb{R}$ satunnaismuuttujat ja $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali σ-algebra, ja $(x, t) \mapsto f(x, y) \ge 0$ Borel mitallinen kuvaus.

Oletamme $Y(\omega)$ on $\mathcal{G}$-mitallinen ja $X \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{G}$, eli

$$P(\{X \in B\} \cap A) = P(X \in B)P(A) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A \in \mathcal{G}$$

- Osoita Fubinin lauseen avulla kaava

  $$E_P\big(f(X,Y)|\mathcal{G}\big)(\omega) = E_P(f(X,y))\Big|_{y=Y(\omega)} = \Big(\int_\Omega f(X(\omega),y)P(d\omega)\Big)\Big|_{y=Y(\omega)}$$

  R. Osoitettu luentomonisteessa.

  Olkoon X ja Y riippumattomia ja samoin jakautuneita P-mitan suhteen, gaussisella jakaumalla $\mathcal{N}(0,1)$ jolla $E_P(X) = E_P(Y) = 0$ ja $E_P(X^2) = E_P(Y^2) = 1$.

  Olkoon $W(\omega) := X(\omega)Y(\omega)$.

- Laske ehdollinen odotusarvo $E_P\big(\exp(tW)|\sigma(Y)\big)(\omega)$, $t \in \mathbb{R}$.

  Vihje: muistetaan että $E(\exp(tX)) = \exp\big(t^2/2\big)$ kun $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $t \in \mathbb{R}$.

  R. X ja Y:n P-riipumattomuuden nojalla,

  $$E_P(\exp(tXY)|\sigma(Y))(\omega) = E_P(\exp(tyX))\Big|_{y=Y(\omega)}$$
  $$= \exp(\frac{1}{2}t^2Y^2(\omega))$$

- Millä t parametrin arvolla $E_P(\exp(tW)) < +\infty$? Laske $E_P(\exp(tW))$.

  $$E_P(\exp(tW)) = E_P(E_P(\exp(tW)|\sigma(Y))) = E_P(\exp(\frac{1}{2}t^2Y^2(\omega)))$$
  $$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R} \exp(\frac{1}{2}(t^2-1)y^2)dy$$

  on $< \infty$ jos ja vain jos $t^2 < 1$. ja saa arvo

  $$E_P(\exp(tW)) = (1-t^2)^{-1/2}$$