Stokastiikka

Dario Gasbarra

17. joulukuuta 2010

Sisältö

1 Esitiedot edellisistä todennäköisyys- ja mittateorian kursseista

1. Charatheodoryn laajennus lause
2. Dynkinin lause todennäköisyyden laajennuksen yksikäsitteisyydestä
3. Odotusarvojen monotonisen konvergenssin lause
4. Tulo avaruudet, Fubinin lause ja riippumattomuus
5. Borel-Cantellin lemmat
6. Mitan-vaihto kaava odotusarvolle : Radon-Nykodim lause (todistetaan myöhemmin täällä kurssilla)

2 Todennäköisyys äärettömissä tulo-avaruuksissa: satunnais-jonot ja stokastiset prosessit

Jatkossa työskentelemme todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ joka on tarpeeksi rikas sisältämään P-rippumattomien satunnaismuuttujen jonoja $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$. Haluamme varmistaa ensin että selläinen on olemassa.

Esimerkiksi jono P-riippumattomia kolikon heittoja $(X_i(\omega) : i \in \mathbb{N})$ joilla $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = p_i$.
Sille äärellinen tuloavaruus $\Omega_n = \{0,1\}^n$ varustettuna tulomitalla $\mathbb{P}^n := P_1 \otimes \cdots \otimes P_n$ ei riitä.

2.1 Kolmogorovin laajennuslause

Vaikka tässä kurssissa todennäköisyysmittojen jonon tulomitan olemassaolo tuloavaruudessa riittäisi meille hyvin pitkälle,
todistamme saman tien Kolmogorovin laajennuslausetta, joka koskee mielivaltaisia tuloavaruuksia, eikä rajoitu tulomittoihin.
Todistuksessa ei käytetä muuta kun Caratheodoryn laajennuslauseetta ja pientä kompaktisuus-argumenttia.
Vaikka jatkossa me esitämme aina kun on mahdollista probabilistista todistusta, tässä vaiheessa emme voi välttää kokonaan analyyttisia argumentteja.

Määritelmä 2.1. *Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$ satunnaisprosessi on satunnaismuuttujen perhe $(X_t : t \in \mathbb{T})$ jossa $\mathbb{T}$ on mielivaltainen indeksijoukko, ja $X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$.*

Esimerkiksi $\mathbb{T} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$ voisi olla aikaparametri, diskreetti tai jatkuva.

Määritelmä 2.2. *Äärellisulotteisten todennäköisyysmittojen perhe $\mathbb{R}$:ssa on*

$$\Big(P_{t_1,\dots,t_n} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,1], \quad n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T} \Big)$$

on **yhteensopiva** *, jos*

1.

$$P_{t_1,\dots,t_n}(A_1\times\cdots\times A_n)=P_{t_{\pi(1)},\dots t_{\pi(n)}}\big(A_{t_{\pi(1)}}\cdots\times A_{t_{\pi(n)}}\big)$$
$$\forall n\in\mathbb{N}, A_1,\dots A_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R}), t_1,\dots,t_n\in\mathbb{T},\quad \forall \text{ permutaatiolle } \pi$$

2.

$$P_{t_1,\dots,t_n}(A_1\times\cdots\times A_n)=P_{t_1,\dots,t_n,t_{n+1}}(A_1\times\cdots\times A_n\times\mathbb{R})$$

Korostamme että seuraavassa lauseessa indeksijoukko $\mathbb{T}$ on mielivaltainen.

Teoreema 2.1. *(Daniell-Kolmogorov,1933) Olkoon*

$$\Big(P_{\mathbf{t}}:\mathbf{t}\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{T}^n\Big)$$

yhteensopiva perhe äärellisulotteisista todennäköisyysjakaumoista $\mathbb{R}$:ssa, indeksijoukolla $\mathbb{T}$.

On olemassa yksikäsitteinen todennäköisyysmitta $\mathbb{P}$ tuloavaruudella $\Omega=\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ varustettuna tulo-topologian virittämällä sylinterien σ-algebralla $\sigma(\mathcal{C})$,

jolla $\forall n\in\mathbb{N}, t_1,\dots,t_n\in\mathbb{N}, B_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathbb{P}\Bigg(\Big\{\omega\in\mathbb{R}^{\mathbb{T}}:\ (\omega_{t_1},\dots,\omega_{t_n})\in B_n\Big\}\Bigg)=P_{t_1,\dots,t_n}(B_n)\tag{2.1}$$

Sen lisäksi kanoniset kuvaukset $\omega\mapsto X_t(\omega):=\omega_t$ kun $\omega\in\Omega=\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ muodostuvat stokastinen prosessi $(X_t(\omega):t\in\mathbb{T})$ jolla on annetut äärellis-ulotteiset jakaumat

$$\mathbb{P}\Bigg(\Big\{\omega:(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_n}(\omega))\in B_n\Big\}\Bigg)=P_{t_1,\dots,t_n}(B_n)\tag{2.2}$$

Todistus

Tuloavaruuden $\Omega=\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ jäsenet ovat kuvaukset $t\mapsto\omega_t\in\mathbb{R}$.

$\sigma(\mathcal{C})$ on pienin σ-algebra jolla kaikille $t\in\mathbb{T}$ kanooniset kuvaukset

$$\omega\mapsto X_t(\omega)=\omega_t$$

ovat $(\Omega,\sigma(\mathcal{C}))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mitallisia.

Määritellään algebra $\mathcal{C}$ joka sisältää sylinterit

$$C=\Big\{\omega\in\mathbb{R}^{\mathbb{T}}:(\omega_{t_1},\dots,\omega_{t_n})\in B_n\Big\}$$

jossa $n\in\mathbb{N}, t_1,\dots,t_n\in\mathbb{N}, B_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Kaava (2.1) määrittelee kuvauksen $\mathbb{P}:\mathcal{C}\to[0,1]$.

Yhteensopivuuden oletuksesta seuraa että $\mathbb{P}(C)$ on hyvin määritelty, siis ei riipu sylinterin C:n esityksestä.

Koska kahdelle sylintereille löytyy esityksiä yhteisellä indeksijoukolla, ja koska äärellis-ulotteiset jakaumat ovat todennäköisyydet, ei ole vaikea osoittaa että kuvaus $\mathbb{P}:\mathcal{C}\to[0,1]$ on äärellisesti additiivinen.

Kun osoitamme että $\mathbb{P}$ on myös σ-additiivinen $\mathcal{C}$ algebrassa, Charatheodoryn laajennuslause astuu voimaan ja $\mathbb{P}$ voidaan laajentaa yksikäsitteisesti σ-additiiviseksi todennäköisyysmitaksi joka on määritelty σ-algebrassa $\sigma(C)$.

Eli jää osoitettavaksi väite:
jos $\{C_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$ on sylinterien jono jolla

$$C_n \supseteq C_{n+1} \forall n, \text{ ja } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \emptyset,$$

seuraa $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(C_n) = 0$.

Vastaoletuksella $C_n \supseteq C_{n+1}$ ja $\mathbb{P}(C_n) \geq \varepsilon \ \forall n$ jollekin $\varepsilon > 0$, näytämme että $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

Valitsemalla sopivasti sylinterien esityksiä ja mahdollisesti toistaamalla sylintereita jonossa, voidaan aina rakentaa indeksijonoa $(t_n) \subseteq \mathbb{T}$ ja sylinterijono $\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ jolla on esitys

$$D_n = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_n}) \in A_n \right\}$$

jossa $D_n \supseteq D_{n+1} \forall n$, $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $A_n \times \mathbb{R} \supseteq A_{n+1} \forall n$, ja kaikille $m \in \mathbb{N}$ on olemassa n jolla $D_n = C_m$.

Seuraa että $\mathbb{P}(D_n) \geq \varepsilon > 0 \ \forall n$ ja

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n \ .$$

Koska $P_{t_1,\ldots,t_n}$ on todennäköisyysmitta $\mathbb{R}^n$:ssa ja siksi σ-additiivinen, ja A_n on Borel mitallinen, on olemassa suljettu joukko $F_n \subseteq A_n$ (katso tehtävä 1) jolla

$$P_{t_1,\ldots,t_n}(A_n \setminus F_n) < \varepsilon 2^{-n} \ .$$

Valitsemalla tarpeeksi suurta origo-keskeistä palloa $B(0, r_n)$, löytyy myös kompakti $K_n = \big(F_n \cap B(0, r_n)\big) \subseteq A_n$ jolla edelleen

$$P_{t_1,\ldots,t_n}(A_n \setminus K_n) = \mathbb{P}(D_n \setminus G_n) < \varepsilon 2^{-n}$$

jossa

$$G_n := \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_n}) \in K_n \right\}$$

Koska nämä eivät välttämättä muodosta vähenevää jonoa, otamme leikkaukset

$$G'_n = \bigcap_{m=1}^{n} G_m = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_n}) \in K'_n \right\}$$

jossa

$$K'_n := K_n \cap (K_{n-1} \times \mathbb{R}) \cap \cdots \cap (K_1 \times \mathbb{R}^{n-1}) \subseteq K_n$$

ovat kompakteja (kompakti ja sulijetun joukon leikkaus on kompakti).

Seuraa $G'_n \supseteq G'_{n+1}$, ja $(K'_n \times \mathbb{R}) \supseteq K'_{n+1}$.

Tästä seuraa

$$P_{t_1,\dots,t_n}(K'_n) = \mathbb{P}(G'_n) = \mathbb{P}(D_n) - \mathbb{P}(D_n \setminus G'_n) =$$

$$P_{t_1,\dots,t_n}(A_n) - P_{t_1,\dots,t_n}\Big(\bigcup_{m=1}^{n} A_n \setminus (K_m \times \mathbb{R}^{(m-n)})\Big)$$

$$\geq P_{t_1,\dots,t_n}(A_n) - P_{t_1,\dots,t_n}\Big(\bigcup_{m=1}^{n} (A_m \setminus K_m) \times \mathbb{R}^{(m-n)}\Big)$$

$$(\text{ koska } A_m \times \mathbb{R}^{(n-m)} \supseteq A_n \text{ kun } n \geq m \text{ })$$

$$= \mathbb{P}(D_n) - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{m=1}^{n} D_m \setminus G_m\Big)$$

$$\geq \mathbb{P}(D_n) - \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(D_m \setminus G_m) \geq \varepsilon - \sum_{m=1}^{n} \varepsilon 2^{-m} > \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

jossa käytettiin vastaoletusta $\mathbb{P}(D_n) > \varepsilon$.

Siksi $\forall n$, $\exists (x_1^{(n)} \dots, x_n^{(n)}) \in K'_n \neq \emptyset$.

Koska jono G'_n ei kasva, seuraa että $(x_1^{(n)}) \subseteq K'_1 \subseteq \mathbb{R}$

K'_1 on kompakti, siksi on olemassa suppeneva alijono $x_1^{(n_l)} \to x_1^* \in K'_1$.

Myös alijono $(x_1^{(n_l)}, x_2^{(n_l)}) \subseteq K'_2$, ja on olemassa suppeneva alijonon alijono jolla on raja $(x_1^*, x_2^*) \in K'_2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

Induktiivisesti löytyy jono (x_n^*) jolla $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in K'_n \subseteq \mathbb{R}^n \ \forall n$.

Joukot

$$D^* = \Big\{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : \omega_{t_n} = x_n^* \quad \forall n\Big\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G'_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

eivät ole tyhjiä □

Seuraavaksi näytämme että Kolmogoroviin lause on voimassa silloin kun prosessi $X_t(\omega)$ saa arvot hyvin yleisemmässa avaruudessa.

Määritelmä 2.3. Borelin avaruus $(S, \mathcal{S})$ *on todennäköisyys avaruus joka on kuvattavissa mitallisen bijektion kautta (jolla on myös mitallinen käänteiskuvaus) johonkin* $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$*-avaruuten mitaaliseen joukkoon.*

Seuraus 2.1. *Kolmogorovin laajennuslause soveltuu myös tuloavaruuteen* $S^{\mathbb{T}}$ *kun* $(S, \mathcal{S})$ *on Borelin avaruus (esimerkiksi* $\mathbb{R}^d$*), mielivaltaisella indeksijoukolla* $\mathbb{T}$*.*

Todistus Olkoon $f : S \leftrightarrow B \in \mathcal{B}([0,1])$ mitallinen bijektio,

ja $(P_{t_1,\dots,t_n} : n \in \mathbb{N}, t_i \in \mathbb{T})$ on yhteensopivien äärellisulotteinen jakaumien perhe Borel avaruudessa S.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}([0,1])$

$$Q_{t_1,\dots,t_n}(B_1 \times \dots \times \in B_n) := P_{t_1,\dots,t_n}(f^{-1}(B_1) \times \dots \times f^{-1}(B_n))$$

jossa mitallisuudesta seuraa $f^{-1}(B_i) \in \mathcal{S}$, määrittelee yhteensopiva äärellisulotteisten todennäköisyysjakaumien perhe $\mathbb{R}$:ssa, (koska n-ulotteiset suorakulmaiset joukot muodostuvat Dynkinin d-luokan joka virittää koko tulo σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$).

Kolmogorovin laajennuksen perusversio 2.1 soveltuu, on olemassa todennaköisyysmitta $\mathbb{P}$ ja stokastinen prosessi $(Y_t(\omega) : t \in \mathbb{T})$ kanonisessa avaruudessa $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ jolla

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(Y_{t_1}(\omega) \in B_1, \dots, Y_{t_n}(\omega) \in B_n) = Q_{t_1,\dots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_n)\\ &= P_{t_1,\dots,t_n}(f^{-1}(B_1) \times \cdots \times f^{-1}(B_n))\end{aligned}$$

Seuraa tästä $X_t(\omega) := f^{-1}(Y_t(\omega))$, on stokastinen prosessi joka saa arvot Borel avaruudessa $(S, \mathcal{S})$ ja

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{t_1}(\omega) \in S_1, \dots, X_{t_n}(\omega) \in S_n) = \mathbb{P}(Y_{t_1}(\omega) \in f(S_1), \dots, Y_{t_n}(\omega) \in f(S_n))\\ &= Q_{t_1,\dots,t_n}(f(S_1) \times \cdots \times f(S_n)) = P_{t_1,\dots,t_n}(S_1 \times \cdots \times S_n) \quad \square\end{aligned}$$

Tehtävä 2.1. *Separoituva metrinen avaruus (S, d) varustettuna Borelin σ-algebralla (metrisen avaruuden avoimien joukkojen virittämä) on Borelin avaruus.*

Todistuksen linja (ei viety loppuun asti) : Metrinen avaruus on separoituva kun on olemassa numeroituva jono $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ joka on tiheä S:ssa metrisen topologian suhteen, eli $\forall x \in S$ on olemassa alijono $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ jolla $d(y_{n_k}, x) \to 0$.

Tämän alijonon kautta voidaan koodata jokaisen pisteen $x \in S$ "osoiteetta" yksikäsitteisesti binäärijonolla.

Kyseinen kuvaus voidaan rakentaa seuraavasti: olkoon

$$n_k := \operatorname{argmin}_{1\le m<2^k}\{d(y_m, x)\}$$

jossa käytetään $\{y_n\}$ jonon järjestystä silloin kun minimi ei ole yksikäsitteinen.

Selvästi $y_{n_k} \to x$.

Koska $n_k \le 2^k$, sen binääri kehitelmä

$$n_k = \sum_{m=0}^{k-1} \eta_m^{(k)} 2^m, \quad \eta_m^{(k)} \in \{0, 1\}$$

voidaan koodata sanalla $\eta^{(k)} = (\eta_0^{(k)}, \dots, \eta_{k-1}^{(k)}) \in \{0, 1\}^k$).

Yhdistämällä toisen perään sanat $\eta^{(k)}, k \in \mathbb{N}$ saadaan binääri jonoa joka vastaa taas jonkun luvun $u(x) \in [0, 1]$ binääri-kehitelmä. Kuvaus $x \mapsto u(x)$ on injektiivinen, ja ei ole vaikea osoittaa että se on mitallinen, ja sen käänteiskuvaus $u^{-1} : u(S) \to S$ on myös mitallinen, silloin kun (S, d) varustetaan Borel σ-algebralla $\mathcal{B}(S)$.

Huomataan että

$$A_{k,l} := \{x \in S : n_k(x) = l\} \in \mathcal{B}(S),$$

kuvautuu johonkin dyadisten välien yhdisteseen joka kuluu σ-algebraan $\mathcal{B}([0, 1])$.

Dyadiset välit $(l2^{-k}, (l + 1)2^{-k}]$, $k \in \mathbb{N}, 0 \le l < 2^k$ virittävät $\mathcal{B}([0, 1])$.

Jää osoitettavaksi että $\sigma(A_{k,l}, k \in \mathbb{N}, 0 \le l < 2^k) = \mathcal{B}(S) \quad \square$

Esimerkki 2.1. $\mathbb{R}^d \supseteq \mathbb{Q}^d$ *on Borel avaruus. Kolmogorovin laajennus soveltuu myös vektoriavoisille prosesseille.*

2.2 Tehtävät

1. Osoita: jos $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\forall \varepsilon > 0$ ja $\forall P$ todennäköisyysmittoja avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on olemassa olemassa avoin joukko U ja suljettu joukko F jolla $F \subseteq B \subseteq U$, ja $P(U \setminus F) < \varepsilon$.

   Vihje Olkoon $\mathcal{A}$ kokoelma joukoista joilla on kyseinen ominaisuus. Osoita että $\mathcal{A}$ on σ-algebra joka sisältää suljetut joukot, ja siksi sisältää kaikki Borelin joukot. Käytä σ-additiivisuutta !

2. Olkoon $(S, \mathcal{S})$ Borelin avaruus, ja $K(x, dy)$ a *todennäköisyys-ydin*, joka on kuvaus $K : S \times \mathcal{S} :\to [0, 1]$, jolla

   (a) $\forall x \in S$ kuvaus $A \mapsto K(x, A)$ on todennäköisyysmitta.

   (b) $\forall A \in \mathcal{S}$, kuvaus $x \mapsto K(x, A)$ on mitallinen.

   - Olkoon $x \in S$. Soveltakaa Kolmogorovin lajennuslausetta osoittamalla että on olemassa todennäköisyysmitta $\mathbb{P}_x$ jono avaruudessa $\Omega = S^{\mathbb{N}}$ ja stokastinen prosessi $(X_t(\omega) = \omega_t,\ t \in \mathbb{N})$ joilla kaikille n, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$,

   $$\mathbb{P}_x\Big(X_0(\omega) \in A_0, X_1(\omega) \in A_1, \ldots, X_n(\omega) \in A_n\Big) =$$
   $$\mathbf{1}_{A_0}(x) \int_{A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_n} K(x_{n-1}, dx_n) K(x_{n-2}, dx_{n-1}) \ldots K(x, dx_1)$$

   - Olkoon $\pi(dx)$ todennäköisyysmitta $(S, \mathcal{S})$. Osoite että on olemassa todennäköisyysmitta $\mathbb{P}_\pi$ jonojen avaruudessa $\Omega = S^{\mathbb{N}}$ ja satunnaismuuttujen jono joilla $(X_t(\omega) = \omega_t,\ t \in \mathbb{N})$ satisfies for all n, $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$,

   $$\mathbb{P}_\pi\Big(X_0(\omega) \in A_0, X_1(\omega) \in A_1, \ldots, X_n(\omega) \in A_n\Big) =$$
   $$\int_{A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_n} K(x_{n-1}, dx_n) K(x_{n-2}, dx_{n-1}) \ldots K(x_0, dx_1) \pi(dx_0)$$

     $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ kutsutaan Markovin prosessiksi alkujakaumalla $\pi(dx)$ ja siirtymäytimellä $K(x, dy)$.

   - Olkoon

   $$K^n(x, dy) := \mathbb{P}_x(X_n \in dy), n \in \mathbb{N} \tag{2.3}$$

     Osoita että $K^n(x, dy)$ $n \in \mathbb{N}$ ovat todennäköisyys-ytimiä jotka toteuttavat Chapmanin-Kolmogorovin yhtälö: $\forall m, n \in N$

   $$K^{n+m}(x, dy) = \int_S K^n(x, dz) P^m(z, dy) \tag{2.4}$$

3 Mitanvaihto kaava odotusarvolle

Käytämme seuraavat pikanotaatioita silloin kun selvää että on kyse satunnaismuuttujasta eikä tapahtumasta:

Olkoon $X(\omega)$ satunnaismuuttuja.

Jos X on $\mathcal{F}$-mitallinen merkitään $X \in \mathcal{F}$, tai $X \in L^0(\Omega, \mathcal{F})$.

Jos $X \in \mathcal{F}$ ja $X(\omega) \geq 0 \forall \omega$ merkitään $X \in \mathcal{F}^+$.

Jos $X \in \mathcal{F}$ ja $X(\omega) \geq 0$ P-m.v. merkitään $X \in L^0_+(\Omega, \mathcal{F})$.

Kun

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$$

jossa $x_i \in \mathbb{R}$ ja $A_i \in \mathcal{F}$, sanotaan että X on **yksinkertainen** satunnaismuuttuja ja merkitsemme $X \in \mathcal{YF}$. Merkisten myös $\mathcal{YF}^+ = \mathcal{YF} \cap \mathcal{F}^+$.

Todennäköisyys avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon satunnaismuuttuja $Z(\omega) \geq 0$ P-melkein varmasti jolla $0 < E_P(Z) < \infty$, josta seuraa myös $P(\{\omega : Z(\omega) > 0\}) > 0$.

Määritellään uusi todennäköisyysmitta $Q : \mathcal{F} \to [0, 1]$

$$Q(A) := \frac{E_P(Z\mathbf{1}_A)}{E_P(Z)} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Q on todennäköisyysmitta: Selvästi on additiivinen ja $Q(\Omega) = 1$. Osoitamme että on myös σ-additiivinen: kun $A_n \uparrow \Omega$, (eli $A_n \subseteq A_{n+1}$ ja $\bigcup_n A_n = \Omega$), myös $Z(\omega)\mathbf{1}_{A_n}(\omega) \uparrow Z(\omega)$ P-melkein varmasti. Monotonisen konvergenssin lauseesta (**??**) seuraa

$$Q(A_n)E_P(Z) = E_P\big(Z\mathbf{1}_{A_n}\big) \uparrow E_P(Z) = Q(\Omega)E_P(Z) \quad \Longrightarrow \quad Q(A_n) \uparrow 1$$

Voidaan myös käyttää normalisoitua muuttujaa

$$\widetilde{Z}(\omega) := \frac{Z(\omega)}{E_P(Z)}$$

jolla $E_P(\tilde{Z}) = 1$, ja kirjoittaa $Q(A) = E_P\big(\widetilde{Z}\mathbf{1}_A\big)$.

Teoreema 3.1. $\forall A \in \mathcal{F}$ $P(A) = 0 \implies Q(A) = 0$. *Sanotaan että Q on absoluuttisesti jatkuva P:n suhteen, ja merkitään $Q \ll P$.*

Tod. kun $P(A) = 0$, $Z(\omega)\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ P-melkein varmasti.

Teoreema 3.2. *Kun $X \in \mathcal{F}^+$, (eli $X(\omega) \geq 0$ P-m.v. ja $\mathcal{F}$-mitallinen) ,*

$$E_Q(X) = \frac{E_P(XZ)}{E_P(Z)},$$

ja $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ jos ja vain jos $(XZ) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Tod. Kun $X(\omega) \in \mathcal{YF}^+$, väite seuraa suoraan määritelmästä ja odotusarvon lineaarisuudesta. Kun $X \in \mathcal{F}^+$ on olemassa jono $\{X_n\} \subseteq \mathcal{YF}^+$ jolle $0 \leq X_n(\omega) \leq X(\omega)$ $\forall \omega$. Soveltamalla Monotonisen konvergenssin lauseen kaksi kertaa Q mitan alla ja P mitan alla, seuraa että $E_Q(X_n) \uparrow E_Q(X)$ ja

$$E_Q(X_n) = \frac{E_P(X_nZ)}{E_P(Z)} \uparrow \frac{E_P(XZ)}{E_P(Z)} \quad \square$$

Esimerkki 3.1. *Ehdollinen todennäköisyys*

Olkoon $B \in \mathcal{F}$ jolla $P(B) > 0$, ja suoritamme mitan vaihdon satunnaismuuttujalla $Z(\omega) = P(B)^{-1}\mathbf{1}_B(\omega)$, saadaan

$$P(A|B) := E_P(Z\mathbf{1}_A) = \frac{E_P(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad A \in \mathcal{F}$$

Kuvaus $P(\,\cdot\,|B) : A \in \mathcal{F} \mapsto P(A|B) \in [0,1]$ on todennäköisyysmitta, joka kutsutaan ehdolliseksi todennäköysyydeksi ehdolla B tapahtuman.

Hajotelmasta

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

on paljon hyötyä monimutkaisten tapahtumien todennäköisyyksien laskemisessa.

Satunnaismuuttujan $X \in L^1(P)$ ehdollinen odotusarvo ehdolla B tapahtuman on

$$E_P(X|B) := \frac{E_P(X\mathbf{1}_B)}{P(B)}$$

Huomaamme että tässä vaiheessa ehto $P(B) > 0$ on välttämätön. Miten ehdollisen odotusarvon käsite yleistyy P-nolla mittaisille tapahtumille B ? Vastaus esitetään kurssin loppupuolella.

Olemme rakentaneet mitan $Q \ll P$ satunnaismuuttujan $Z \in L^1(P)$ avulla. Tämä tulos kääntyy toisinpäin, kun $Q \ll P$ on olemassa $0 \le Z(\omega) \in L^1(P)$ jolle mitanvaihto kaava $Q(A) = E_P(Z\mathbf{1}_A)$ on voimassa.

Teoreema 3.3. *(Radon-Nikodym lause) Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$ olkoon P, Q todennäköisyysmittoja (yleisemmin P voisi olla σ-äärellinen mitta), joilla $Q(A) = 0$ aina kun $A \in \mathcal{F}$ ja $P(A) = 0$ (merkintä: $Q \overset{\mathcal{F}}{\ll} P$). Silloin on olemassa satunnaismuuttuja $0 \le Z(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jolle $E_P(Z) = 1$ ja*

$$Q(A) = E_P(Z\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$Z(\omega)$ on yksikäsitteinen vailla P-nolla joukkoja. Merkitään

$$Z(\omega) = \frac{dQ}{dP}(\omega),$$

joka kutsutaan uskottavuus-osamääräksi (engl. likelihood ratio) tai Radon-Nikodym derivaataksi.

R-N lause todistetaan kurssin loppupuolella martingaalien avulla.

Mitanvaihto-kaava saa muotoa

$$E_Q(X) = \int_\Omega X(\omega)Q(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)\,\frac{dQ}{dP}(\omega)\,P(d\omega)$$

Määritelmä 3.1. *Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$ todennäköisyysmitat P ja P' ovat singulaarisia (merkintä: $P \perp P'$), kun on olemassa $A \in \mathcal{F}$ jolla $P(A) = 0$ ja $P'(A) = 1$.*

Esimerkki 3.2. *Todennäköisyys avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon $\mathcal{F} = \sigma(X)$ jossa $X(\omega)$ on standardi-gaussinen satunnaismuuttuja jolla $E(X) = 0, E(X^2) = 1$, eli*

$$P(X \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\bigl(-\frac{x^2}{2}\bigr) dx$$

Olkoon P' toinen todennäköisyysmitta jolla

$$P'(X_i \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\bigl(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\bigr) dx$$

Laskemme uskottavuusosamäärät

$$Z'(\omega) = \frac{dP'}{dP}(\omega) \quad ja \quad Z(\omega) = \frac{dP}{dP'}(\omega) = \frac{1}{Z'(\omega)}$$

R-N lauseesta seuraa että $Z'(\omega)$ on $\sigma(X)$ mitallinen, siksi on olemassa Borel mitallinen kuvaus $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ jolla $Z'(\omega) = z'(X(\omega))$ (tehtävä 1).

Silloin, kaikille Borel mitallisille funktioille $f(x) \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp\bigl(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\bigr) dx = E_{P'}(f(X)) = E_P(f(X)Z') \\
&= E_P(f(X)z'(X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) z'(x) \exp\bigl(-\frac{x^2}{2}\bigr) dx
\end{aligned}$$

josta seuraa

$$\begin{aligned}
z'(x) &= \exp\bigl(\mu x - \frac{1}{2}\mu^2\bigr), \\
Z'(\omega) &= \exp\bigl(\mu X(\omega) - \frac{1}{2}\mu^2\bigr)
\end{aligned}$$

Koska $E_P(Z') = 1$, seuraa

$$E_P\bigl(\exp(\mu X)\bigr) = \exp\bigl(\frac{1}{2}\mu^2\bigr)$$

3.1 Lebesguen hajotelma

Olkoon P, P' todennäköisyysmittoja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$, joilla ei välttämättä $P \ll P'$ tai $P' \ll P$.

$Q := \frac{1}{2}(P + P')$ on todennäköisyysmitta jolla selvästi $P \ll Q$ ja $P' \ll Q$ σ-algebrassa $\mathcal{F}$.

R-N lauseesta (3.3) seuraa että uskottavuusosamäärät

$$\zeta(\omega) := \frac{dP}{dQ}(\omega) \text{ ja } \zeta'(\omega) := \frac{dP'}{dQ}(\omega) \; ,$$

ovat olemassa, ei-negatiivisiä ja $\mathcal{F}$-mitallisia.

Huomataan että koska $\forall \omega$

$$\zeta(\omega) + \zeta'(\omega) = \frac{2dP}{d(P+P')}(\omega) + \frac{2dP'}{d(P+P')}(\omega) = 2 \, \frac{d(P+P')}{d(P+P')}(\omega) = 2$$

ja $\zeta(\omega) \geq 0, \zeta'(\omega) \geq 0$ seuraa

$$\zeta(\omega) \leq 2, \zeta'(\omega) \leq 2 \quad Q \text{ m.v.}, \quad \text{ja} \quad Q\big(\{\omega : \zeta(\omega) = 0\} \cap \{\omega : \zeta'(\omega) = 0\}\big) = 0.$$

Määritellään $\forall \omega \in \Omega$

$$Z(\omega) = \frac{dP}{dP'}(\omega) := \frac{\zeta(\omega)}{\zeta'(\omega)} \quad \text{ja } Z'(\omega) = \frac{dP'}{dP}(\omega) := \frac{\zeta'(\omega)}{\zeta(\omega)} = \frac{1}{Z(\omega)}$$

jossa $0/0$ saa mielivaltainen arvo, esimerkiksi 0.

Mitan-vaihto kaavan yleistys on

$$E_{P'}(X) = E_P(XZ') + E_{P'}(X\mathbf{1}(\zeta = 0))$$

kun $X \in \mathcal{F}^+$.

Todistus

$$\begin{aligned} E_{P'}(X) &= E_{P'}\big(X\{\mathbf{1}(\zeta > 0) + \mathbf{1}(\zeta = 0)\}\big) = E_Q\big(X\zeta'\mathbf{1}(\zeta > 0)\big) + E_{P'}\big(X\mathbf{1}(\zeta = 0)\big) \\ &= E_Q\bigg(X\frac{\zeta'}{\zeta}\zeta\mathbf{1}(\zeta > 0)\bigg) + E_{P'}\big(X\mathbf{1}(\zeta = 0)\big) = E_Q(XZ'\zeta) + E_{P'}\big(X\mathbf{1}(\zeta = 0)\big) \\ &= E_P(XZ') + E_{P'}\big(X\mathbf{1}(\zeta = 0)\big) = E_P(XZ') + E_{P^\perp}(X) \end{aligned}$$

jossa

$$P^\perp(d\omega) := \mathbf{1}(\zeta(\omega) = 0)P'(d\omega) \ ,$$

Siis

$$P'(d\omega) = Z'(\omega)P(d\omega) + \mathbf{1}(\zeta(\omega) = 0)P'(d\omega) = Z'(\omega)P(d\omega) + P^\perp(d\omega)$$

P ja $P^\perp$ ovat singulaarisia, koska joukolle $A := \{\omega : \zeta(\omega) = 0\}$ pätee

$$P(A) = 0 \text{ ja } P^\perp(A) = P^\perp(\Omega)$$

Koska $P^\perp(\Omega) + E_P(Z') = P'(\zeta = 0) + E_P(Z') = 1$, $P^\perp$ on todennäköisyysmitta jos ja vain jos $P \perp P'$, (silloin $P^\perp = P'$). Myös $E_P(Z') \leq 1$ ja $E_P(Z') = 1$ jos ja vain jos $P' \ll P$, silloin $P^\perp = 0$.

3.2 Harjoitukset

1. Olkoon $X(\omega)$ satunnaismuuttuja todennäkösyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$, ja olkoon $Z(\omega)$ $\sigma(X)$-mitallinen satunnaismuuttujal.

   Osoita että on olemassa Borel mitallinen kuvaus $x \in \mathbb{R} \mapsto z(x) \in \mathbb{R}$ jolla $Z(\omega) = z(X(\omega))$.

2. Todennäköisyys avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ P-rippumattomia ja samoin-jakautuneita standardi-gaussisia satunnaismuuttujat joilla

   $$P(X_i \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\big(-\frac{x^2}{2}\big)dx \quad i = 1, \ldots, n$$

   Olkoon P' toinen todennäköisyysmitta jolla $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ ovat P'-rippumattomia ja gaussisia samoinjakautuneita, jossa

   $$P'(X_i \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\big(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\big)dx \quad i = 1, \ldots, n$$

Kun $\mathcal{F} = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ laske uskottavuusosamäärät

$$Z'(\omega) = \frac{dP'}{dP}(\omega) \quad \text{ja} \quad Z(\omega) = \frac{dP}{dP'}(\omega)$$

3. Todennäköisyys avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ $\mathbb{R}$-arvoinen Markov prosessi jolla on alkujakauma

$$P(X_0 \in dx) = \pi(dx)$$

ja siirtymäydin $K(x, dy)$.

Olkoon P' toinen jakauma jonka suhteen $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ on myös Markov, alkujakaumalla $P'(X_0 \in dx) = \pi'(dx)$ ja siirtymäydimellä $K'(x, dy)$.

Oleta: $\pi' \ll \pi$ ja $\forall x \in \mathbb{R}$ $K'(x, \cdot) \ll K(x, \cdot)$

Kun $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, laske R-N derivaatta

$$Z_n(\omega) = \frac{dP'\big|_{\mathcal{F}_n}}{dP\big|_{\mathcal{F}_n}}(\omega)$$

jossa $P\big|_{\mathcal{F}_n}$ on todennäikösyys P rajoitettuna σ-algebraan $\mathcal{F}_n$, ja R-N lause sovelletaan todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$, josta seuraa että $Z_n(\omega)$ pitää olla $\mathcal{F}_n$-mitallinen.

4. Olkoon $X_0(\omega) \in \mathbb{N}$, $P(X_0(\omega) = k) = \pi(k) \quad k \in \mathbb{N}$, ja

$$X_t(\omega) = \sum_{k=0}^{X_{t-1}(\omega)} Y_{t,k}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}(k \le X_{t-1}(\omega)) Y_{t,k}(\omega)$$

jossa s.m. $(X_0, Y_{t,k}(\omega) : t, k \in \mathbb{N})$ ovat P-riippumattomia ja

$$P(Y_{t,i} = k) = p(k) \quad k \in \mathbb{N} \quad \forall t, i \in \mathbb{N}$$

Prosessi $(X_t : t \in \mathbb{N})$ on diskreettiaikainen **haarautumisprosessi**, alkujakaumalla $\pi(k)$ ja jälkikasvun jakaumalla $p(k)$.

- Osoita että $(X_t : t \in \mathbb{N})$ on Markov prosessi, siirtymäytimellä $K(l, m) = P(X_t = m | X_{t-1} = l)$

Olkoon P' toinen todennäköisyys jolla (X_t) on haarautumisprosessi alkujakaumalla $\pi'(k)$ ja jälkikasvun jakaumalla $p'(k)$, siirtymäytimellä $K'(l, m) = P'(X_t = m | X_{t-1} = l)$.

Oletamme

$$\pi(k) = 0 \Longrightarrow \pi'(k) = 0 \quad \text{ja} \quad p(k) = 0 \Longrightarrow p'(k) = 0$$

Olkoon $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

- Laske R-N derivaatta

$$Z_n(\omega) = \frac{dP'\big|_{\mathcal{F}_n}}{dP\big|_{\mathcal{F}_n}}(\omega)$$

4 Stokastinen konvergenssi

Lemma 4.1. *(Ensimmäinen Borel-Cantellin lemma).*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \implies P\big(\limsup_n A_n\big) = P\big(\{\omega : \omega \in A_n \text{ äärettömästi monille } n\text{:lle } \}\big) = 0$$

Lemma 4.2. *(Fatou lemma) Kun $X_n(\omega) \geq 0$ P-melkein varmasti $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$0 \leq E_P\big(\liminf_n X_n\big) \leq \liminf_n E_P\big(X_n\big)$$

Tämä seuraa myös kun $X_n(\omega) \geq Z(\omega)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ P-melkein varmasti, jossa $E_P(Z^-) < +\infty$.

Määritelmä 4.1. *Olkoon $X(\omega), X_n(\omega), n \in \mathbb{N}$ satunnaismuuttujat. Sanotaan että jono (X_n) suppenee stokastisesti (tai todennäköisyyden mielessä) kohti X:aan, (merkintä:$X_n \stackrel{P}{\to} X$) kun jokaiselle $\varepsilon > 0$*

$$P\big(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}\big) \to 0, \qquad \textit{kun } n \to \infty.$$

Stokastinen konvergenssi on heikompi kuin melkein varma konvergenssi:

Lause 4.1. *1. Kun $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ P-melkein varmasti, myös $X_n \stackrel{P}{\to} X$.*

2. Jos $X_n \stackrel{P}{\to} X$ (stokastisesti), on olemassa deterministinen alijono $\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}$ jolla

$\lim_{k\to\infty} X_{n(k)}(\omega) = X(\omega)$ P-melkein varmasti,

3. $X_n \stackrel{P}{\to} X$ jos ja vain jos kaikille alijonoille $\{n(k)\}$ on olemassa alijonon (deterministinen) alijono $\{n(k_l)\}$ jolla $X_{n(k_l)}(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti kun $l \to \infty$.

Tod. Voidaan olettaa että $X(\omega) = 0$, muuten otetaan $\tilde{X}_n(\omega) = X_n(\omega) - X(\omega)$.

1. $X_n(\omega) \to 0$ P-m.v. jos ja vain jos

$$P\bigg(\bigcap_n \bigcup_m \bigcap_{k\geq m} \{\omega : |X_k(\omega)| < n^{-1}\}\bigg) = 1$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad P\bigg(\liminf_k \{\omega : |X_k(\omega)| < n^{-1}\}\bigg) = 1$$

Fatou lemmasta $\forall n$

$$1 = P\bigg(\liminf_k \{\omega : |X_k(\omega)| < n^{-1}\}\bigg) \leq \liminf_k P\bigg(\{\omega : |X_k(\omega)| < n^{-1}\}\bigg) = 1$$

$$\iff 0 = \limsup_k P\bigg(\{\omega : |X_k(\omega)| > n^{-1}\}\bigg) = \lim_k P\bigg(\{\omega : |X_k(\omega)| > n^{-1}\}\bigg)$$

2. Stokastisesta konvergenssista seuraa että on olemassa jono k_n jolla

$$P\Big(\{\omega : |X_l(\omega)| > n^{-1}\}\Big) < 2^{-n}, \quad \forall l \geq k_n$$

Koska

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\{\omega : |X_{k_n}(\omega)| > n^{-1}\}\Big) < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{2} < \infty$$

Borel-Cantelli lemmasta (4.1) seuraa

$$\begin{aligned} 0 &= P\Big(\limsup_n \{\omega : |X_{k_n}(\omega)| > n^{-1}\}\Big) \\ &\geq P\Big(\limsup_n \{\omega : |X_{k_n}(\omega)| > N^{-1}\}\Big) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

josta seuraa

$$\begin{aligned} 1 &= P\Big(\bigcap_N \liminf_n \{\omega : |X_{k_n}(\omega)| \leq N^{-1}\}\Big) \\ \iff & \quad X_{k_n}(\omega) \to 0 \quad P\text{-melkein varmasti.} \end{aligned}$$

3. Olkoon $X(\omega) = 0$ ja tehdään vastaoletus että X_n ei suppenisi stokastisesti kohti nollaan: on olemassa $\varepsilon > 0$ ja jono $n(k) \uparrow \infty$ kun $k \uparrow \infty$ jolla

$$P(|X_{n(k)}| > \varepsilon) \geq \varepsilon > 0 \quad \forall k$$

Tästä tulee ristiriita koska oletetusti olisi olemassa alijono $n(k_l)$ jolla $X_{n(k_l)}(\omega) \to 0$ P-melkein varmasti ja siksi myös stokastisesti, siksi saadaan ristiriita

$$0 < \varepsilon \leq P(|X_{n(k_l)}| > \varepsilon) \to 0 \quad \text{kun } l \to \infty \quad \square$$

Esimerkki 4.1. *Näytämme että stokastinen konvergenssi on aidosti heikompi kuin melkein varmaa konvergenssia: Olkoon $\Omega = (0,1]$ varustettu Borel σ-algebralla $\mathcal{F} = \mathcal{B}((0,1])$ tasaisella todennäköisyydella , siis $P((0,t]) = t$, kun $t \in (0,1]$.*

Määritellään satunnaismuuttujen jono

$$X_{n,k}(\omega) = \mathbf{1}_{(k2^{-n},(k+1)2^{-n}]}(\omega) \quad k = 0, 1, \ldots, (2^n - 1)$$

jossa indeksit voidaan järjestää seuraavaksi: $(n,k) \geq (m,h)$ jos ja vain jos $n > m$ tai $n = m$ ja $k \geq h$.

Seuraa että $\forall \omega \in (0,1]$ kun $(n,k) \to \infty$ järjsteyksen mukaisesti,

$$\begin{aligned} &\lim \inf_{n,k\to\infty} X_{n,k}(\omega) = 0 \neq \lim \sup_{n,k\to\infty} X_{n,k}(\omega) = 1, \ \textit{ja} \\ &P(\{\omega : X_{n,k} > 1/2\}) = P((k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]) = 2^{-n} \to 0 \ \textit{kun } n \to \infty\,. \end{aligned}$$

Tehtävä 4.1. *Etsi jonolle $(X_{n,k}(\omega), n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n)$ aliljono $(X_{n(l),k(l)} : l \in \mathbb{N})$ jolla $X_{n(l),k(l)}(\omega) \to 0$ P-m.v. kun $l \to \infty$.*

Teoreema 4.1. *Stokastinen konvergenssin topologia on metrinen.*

$$\begin{aligned} &X_n \xrightarrow{P} X \iff d(X, X_n) \to 0, \ \textit{jossa} \\ &d(X,Y) = d(X-Y,0) = E_P\Big(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\Big) \ \textit{tai} \\ &d(X,Y) = d(X-Y,0) = E_P\big(1 \wedge |X-Y|\big) \end{aligned}$$

Olkoon $X_n \xrightarrow{P} X = 0$. $\forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} &\frac{|X_n|}{(1+|X_n|)} \le \frac{|X_n|}{(1+|X_n|)} \mathbf{1}(|X_n| > \varepsilon) + \varepsilon \mathbf{1}(|X_n| \le \varepsilon) \le \mathbf{1}(|X_n| > \varepsilon) + \varepsilon, \\ &d(X_n, 0) \le P(|X_n| > \varepsilon) + \varepsilon < 2\varepsilon \end{aligned}$$

kun n on tarpeeksi suuri.

Toisinpäin, koska kuvaus $f(x) = x/(1+x)$ on aidosti kasvava ($f'(x) = (1+x)^{-2}$), $\forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \mathbf{1}(|X_n| > \varepsilon) \le \frac{|X_n|}{1+|X_n|} \mathbf{1}(|X_n| > \varepsilon) \le \frac{|X_n|}{1+|X_n|} \\ &\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} P(|X_n| > \varepsilon) \le d(|X_n|, 0) \to 0 \text{ kun } n \to \infty \end{aligned}$$

Näytämme että $d(X,Y)$ on etäisyys, se täyttää kolmion epäyhtälön:

$$\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|} \le \frac{|X-Z| + |Z-Y|}{1+|X-Z| + |Z-Y|} \le \frac{|X-Z|}{1+|X-Z|} + \frac{|Z-Y|}{1+|Z-Y|}$$

kun otetaan odotusarvo seuraa $d(X,Y) \le d(X,Z) + d(Z,Y)$ $\square$

5 Satunnaismuuttujen $L^1(P)$ konvergenssi.

Olkoon $\Omega = (0,1]$ todennäköisyysavaruus joka on varustettu Borel σ-algebralla $\mathcal{F} = \mathcal{B}((0,1])$ ja todennäköisyydella P jolla $P((0,t]) = t$, kun $t \in (0,1]$ (P on tasainen jakauma),

ja satunnaismuuttujen jono

$$X_n(\omega) = n\mathbf{1}_{(0,n^{-1}]}(\omega), \ n \in \mathbb{N}.$$

Koska $X_n(\omega) = 0$ kun $\omega > n^{-1}$ seuraa että $\forall \omega \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0$.

Kuitenkin $E_P(X_n) = nP((0,n^{-1}]) = n\, n^{-1} = 1$ $\forall n$. Väite

$$\lim_n E_P(X_n) = E_P(\lim_n X_n)$$

yleisesti ei pidä paikansa ilman lisää oletuksia.

Määritelmä 5.1. *Merkitään*

$$L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) = \big\{ \ \mathbb{R}\textit{-arvoset satunnaismuuttujat todennäköisyysavaruudessa } (\Omega, \mathcal{F}, P) \ \big\}$$

jossa tarvittaessa identifioidaan X ja Y kun $X(\omega) = Y(\omega)$ P-melkein varmasti.

Kun $0 < p < \infty$,määritellään

$$L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) = \big\{ X \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ jolla } \| X \|_p < \infty \big\}$$

jossa

$$\| X \|_p = \big\{ E_P(|X|^p) \big\}^{1/p}$$

Sanomme että $X_n \stackrel{L^p}{\to} X$ suppenee L^p-normissa kun $E_P(|X_n - X|^p) \to 0$ kun $n \to \infty$.

Määritellään myös

$$\| X \|_\infty = P\text{-esssup } \{|X(\omega)|\} := \inf\big\{ y \in \mathbb{R} : |X(\omega)| \le y \; P\text{-melkein varmasti } \big\}$$
$$L^\infty = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) = \big\{ X \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ jolla } \| X \|_\infty < \infty \big\}$$

eli satunnaismuuttuja $X(\omega) \in L^\infty(P)$ jos ja vain jos on olemassa deterministinen $K < \infty$ jolle

$$|X(\omega)| \le K \qquad P\text{-melkein varmasti.}$$

eli s.m. on olennaisesti rajoitettu P-mitan suhteen.

Osoitamme (myöhemmin) että $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on Banachin avaruus (eli vektori avaruus jolla on täydellinen normi) kaikille $0 < p \le +\infty$,

ja $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on Hilbertin avaruus skalaaritulolla $\langle X, Y \rangle := E_P(XY)$.

Teoreema 5.1. *Olkoon $0 < p \le \infty$, ja $\lim_{n\to\infty} \| X_n \|_p = 0$. Seuraa että $X_n \stackrel{P}{\to} 0$.*

Tod. Kun $0 < p < +\infty$, väite seuraa **Chebychevin epäyhtälöstä** : kun $\varepsilon > 0$,

$$\varepsilon^p P(|X_n| > \varepsilon) \le E_P(|X_n|^p) \to 0 \text{ kun } n \to \infty\ .$$

Kun $p = +\infty$, $\forall K \in \mathbb{N}\ \exists \bar{n}$ jolla

$$P\big(\{\omega : |X_n(\omega)| \le K^{-1}\}\big) = 1 \qquad \text{kun } n \ge \bar{n}$$

josta seuraa että

$$P\Bigg(\bigcap_K \bigcup_m \bigcap_{n>m} \big\{ \omega : |X_n(\omega)| \le K^{-1} \big\} \Bigg) = P\big(\big\{\omega : X_n(\omega) \to 0\big\}\big) = 1$$

siis $X_n \to 0$ P-melkein varmasti ja myös stokastisesti $\square$

Huomautus: Koska

$$|E_P(X) - E_P(Y)| = |E_P(X - Y)| = |E_P((X - Y)^+) - E_P((X - Y)^-)|$$
$$\le E_P((X - Y)^+) + E_P((X - Y)^-) = E_P(|X - Y|)$$

kun $X_n \stackrel{L^1(P)}{\to} X$ seuraa $E_P(X_n) \to E_P(X)$.

Käsittelemme ensin L^1-konvergenssia. Olemme huomanneet että ehdoista $X_n(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti ja $X, X_n \in L^1(P)$ ei seuraa että $E(X_n) \to E(X)$, eikä myöskään $X_n \stackrel{L^1}{\to} X$.

Siihen tarvitaan sen lisäksi seuraava kompaktisuusehto:

Määritelmä 5.2. *Olkoon satunnaismuuttujen kokoelma $\mathcal{C} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

Satunnaismuuttujen kokoelma $\mathcal{C}$ on **tasaisesti integroituva** *P-mitan suhteen, kun*

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{C}} E_P\big(|X|\mathbf{1}(|X| > K)\big) = \int_{\{\omega:|X(\omega)|>K\}} |X(\omega)|P(d\omega) \longrightarrow 0 \text{ kun } K \to \infty$$

Lemma 5.1. *Äärellinen satunnaismuuttujen joukko $\mathcal{C} = \{X_1, X_2, \ldots, X_M\} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P), M \in \mathbb{N}$ on tasaisesti integroituva, eli $\forall\varepsilon > 0$ on olemassa K jolla*

$$\sup_{1\le m\le M} E_P\Big(|X_m|\mathbf{1}(|X_m| > K)\Big) < \varepsilon$$

Tod. harjoitustehtävä. Vihje: olkoon ensin $M = 1$, $\mathcal{C} = \{X\}$, ja

$$X^{(n)}(\omega) := X(\omega)\mathbf{1}(|X(\omega)| \le K)$$

$|X^{(n)}| \uparrow ?X(\omega|$ ja monotonisen konvergenssi lauseesta seuraa $E_P(|X^{(n)}|) \uparrow E_P(|X|)$
$\square$

Lemma 5.2. $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, jos ja vain jos $\forall\varepsilon > 0$ on olemassa δ, jolla kun $A \in \mathcal{F}$,*

$$P(A) < \delta \Longrightarrow E_P\big(|X|\mathbf{1}_A\big) < \varepsilon$$

Riittavuuden todistus. $\forall\omega$,

$$Y^{(K)}(\omega) := |X(\omega)|\mathbf{1}(|X(\omega)| \le K) \uparrow |X(\omega)|$$

ja lauseesta (5.1) seuraa että

$$E_P(|X|) - E_P(Y^{(K)}) = \int_{\{\omega:|X(\omega)|>K\}} |X(\omega)|P(d\omega) < \varepsilon$$

kun K on tarpeeksi suuri jotta $P(\{\omega : |X(\omega)| > K\}) < \delta$. Tästä seuraa että

$$E_P(|X|) \le E_P(Y^{(K)}) + \varepsilon \le K + \varepsilon < \infty$$

Välttämättömyyden todistus. Tehdään vastaoletus: on olemassa $\varepsilon > 0$ ja tapahtumien jono $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ jolla

$$P(A_n) < 2^{-n} \Longrightarrow E_P\big(|X|\mathbf{1}_{A_n}\big) \ge \varepsilon > 0$$

Olkoon $A = \limsup_n A_n$. Koska

$$\sum_n P(A_n) \le \sum_n 2^{-n} = 1 < \infty$$

seuraa ensimmäisesta Borel Cantelli lemmasta (4.1) että $P(A) = 0$.

Olkoon $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$. Määritelmästä seuraa $A_n \subseteq B_n \downarrow A$, eli

$$|X(\omega)|\mathbf{1}_{A_n}(\omega) \leq |X(\omega)|\mathbf{1}_{B_n}(\omega) \downarrow |X(\omega)|\mathbf{1}_A(\omega) \quad \forall \omega$$

jossa kaikki ylläolevat satunnaismuuttujat ovat integroituvia koska $X \in L^1(P)$. Seuraa väitteen riittavuuden osasta että

$$0 < \varepsilon \leq E_P(|X|\mathbf{1}_{A_n}) \leq E_P(|X|\mathbf{1}_{B_n}) \downarrow E_P(|X|\mathbf{1}_A) = 0$$

koska $P(A) = 0 \quad \square$

Teoreema 5.2. *($L^1(P)$-konvergenssin karakterisaatio) Olkoon satunnaismuuttujat $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $n \in \mathbb{N}$ ja $X \in L^0(\Omega, \mathcal{F})$ Silloin*

$X_n \xrightarrow{P} X$ ja satunnaismuuttujen jono $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ on tasaisesti integroituva,

jos ja vain jos $X_n \xrightarrow{L^1} X \in L^1(P)$, eli

Tod. Kun $X_n \xrightarrow{P} X$ lauseesta (4.1) seuraa että on olemassa deterministinen indeksien alijono $n(k)$ jolle $X_{n(k)}(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti.

Soveltamaalla Fatoun lemmaa (4.2)

$$E_P(|X|) = E_P(\liminf_k |X_{n(k)}|) \leq \liminf_k E_P(|X_{n(k)}|) < \infty$$

koska satunnaismuuttujat $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ovat tasaisesti integroituvia, siis $X \in L^1(P)$.

Olkoon $K \in \mathbb{N}$ ja määritellään kuvaus

$$g^{(K)}(x) = \begin{cases} K & \text{kun } x > K \\ x & \text{kun } |x| \leq K \\ -K & \text{kun } x < -K \end{cases}$$

ja satunnaismuuttujat $X_n^{(K)}(\omega) = g^{(K)}(X_n(\omega))$, $X^{(K)}(\omega) = g^{(K)}(X(\omega))$. Lemmasta (5.1) ja tasaisen integroituvuuden oletuksesta seuraa että $\forall \varepsilon > 0$ on olemassa K jolla

$$E_P(|X - X^{(K)}|) < \varepsilon \quad \text{ja} \quad E_P(|X_n - X_n^{(K)}|) < \varepsilon \quad \forall n,$$

koska

$$\sup_n E_P(|X_n - X_n^{(K)}|) = \sup_n \left\{ \int_{\{\omega : |X_n(\omega)| > K\}} |X(\omega)| P(d\omega) - KP\big(|X_n| > K\big) \right\}$$
$$\leq \sup_n \int_{\{\omega : |X_n(\omega)| > K\}} |X(\omega)| P(d\omega) \longrightarrow 0 \text{ kun } K \to \infty \, .$$

Osoitamme ensin että

$$E_P(|X^{(K)} - X_n^{(K)}|) \to 0 \text{ kun } K \to \infty.$$

Koska $|g^{(K)}(x) - g^{(K)}(y)| < |x - y|$, seuraa $X_n^{(K)} \xrightarrow{P} X^{(K)}$. On olemassa $\bar{n}$ jolla

$$P\big(|X_n^{(K)} - X^{(K)}| > \frac{\varepsilon}{3}\big) < \frac{\varepsilon}{3K} \text{ kun } n \geq \bar{n},$$

josta seuraa

$$E_P(|X_n^{(K)} - X^{(K)}|) = E_P\bigg(|X_n^{(K)} - X^{(K)}|\,\mathbf{1}\bigg(|X_n^{(K)} - X^{(K)}| > \frac{\varepsilon}{3}\bigg)\bigg)$$
$$+E_P\bigg(|X_n^{(K)} - X^{(K)}|\,\mathbf{1}\bigg(|X_n^{(K)} - X^{(K)}| \le \frac{\varepsilon}{3}\bigg)\bigg)$$
$$\le 2K\, P\bigg(|X_n^{(K)} - X^{(K)}| > \frac{\varepsilon}{3}\bigg) + \frac{\varepsilon}{3} \le 2K\frac{\varepsilon}{3K} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad \text{kun } n \ge \bar{n}$$

Kolmioepäyhtälön avulla, kun $n \ge \bar{n}$

$$E_P(|X_n - X|) \le E_P(|X_n - X_n^{(K)}|) + E_P(|X_n^{(K)} - X^{(K)}|) + E_P(|X^{(K)} - X|) \le 3\varepsilon$$

Toisinpäin, kun $E_P(|X_n - X|) \to 0$, seuraa (kts. lause 5.1) että $X_n \xrightarrow{P} X$. Olkoon $\varepsilon > 0$, ja $N \in \mathbb{N}$ jolla

$$E_P(|X - X_n|) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{kun } n \ge N.$$

Lemmasta 5.2 $\exists\, \delta > 0$ jolla $\forall A \in \mathcal{F}$ jolla $P(A) < \delta$ seuraa

$$\max_{n\le N} E_P(|X_n|\mathbf{1_A}) < \varepsilon \qquad \text{ja} \qquad E_P(|X|\mathbf{1_A}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Koska $E_P(|X_n|) \le E_P(|X|) + E_P(|X_n - X|)$ jossa oletetusti $E_P(|X_n - X|) \to 0$, seuraa että on olemassa $K > 0$ jolla

$$\sup_n E_P(|X_n|) < K\delta < \infty\ .$$

Chebychevin epäyhtälöstä seuraa

$$P(|X_n| > K) \le K^{-1} E_P(|X_n|) < \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

Kun $n \ge N$,

$$E_P\big(|X_n|\mathbf{1}(|X_n| > K)\big) \le E_P\big(|X|\mathbf{1}(|X_n| > K)\big) + E(|X - X_n|) < \varepsilon$$

Kun $n \le N$ myös $P(|X_n| > K) < \delta$ ja

$$E_P\big(|X_n|\mathbf{1}(|X_n| > K)\big) < \varepsilon$$

eli tämä on voimassa kaikille $n \in \mathbb{N}$ kun K on tarpeeksi suuri, siis $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ on tasaisesti integroituva $\square$

Osoittaakseen jonon $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tasaisen integroituvuuden, riittää että on olemassa $Y \in L^1(P)$ joka dominoi koko jonon P-melkein varmasti:

Seuraus 5.1. *(Dominoidun konvergenssin lause) Olkoon $X_n \xrightarrow{P} X$ jossa $|X_n(\omega)| \le Y(\omega)$ P-melkein varmasti jollekin $0 \le Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Silloin*

$$|E_P(X_n) - E_P(X)| \le E_P(|X_n - X|) \to 0 \quad \textit{kun } n \to \infty$$

Voidaan osoittaa että tasainen integroituvuus vastaa kompaktisuuden ehtoa $L^1(P)$ avaruudessa varustettuna heikolla topologialla. Tämä ei päde vahvemmalle L^1-normin topologialle.

Teoreema 5.3. *(Dunford-Pettisin lause) Satunnaismuuttujen joukko $\mathcal{C} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on tasaisesti integroituva P-mitan suhteen jos ja vain jos on pre-kompakti $L^1(P)$ avaruuden heikossa topologiassa,*

eli kaikille jonolle $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$ on olemassa indeksien jono $\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}$ ja s.m. $X \in L^1(P)$ joille

$$\lim_{k \to \infty} E_P\big((X_{n(k)} - X)\mathbf{1}_A\big) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Huomautus Tästä ei seura alijonon vahvempi L^1-konvergenssi $E_P(|X_{n(k)} - X|) \to 0$.

On myös hyvää tietää seuraavan tasaisen integroituvuuten karakterisaation

Lause 5.1. *$\mathcal{C} \subseteq L^1(P)$ on tasaisesti integroituva jos ja vain jos*

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} E_P(|X|) < \infty \qquad ja \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta : P(A) < \delta \implies \sup_{X \in \mathcal{C}} E_P\big(|X|\mathbf{1}_A\big) < \varepsilon$$

Tod. Harjoitustehtävä.

Huomautus 5.1. *Kun $\mathcal{C} \subseteq L^1(P)$ on tasaisesti integroituva, seuraa että $\sup_{X \in \mathcal{C}} E_P(|X|) < \infty$. Kuitenkin pallo $B_1 = \{X \in L^1(P) : E_P(|X|) \le 1\}$ ei ole tasaisesti integroituva: olkoon $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ jolle $P(A_n) = n^{-1}$, ja olkoon $X_n(\omega) = n\, \mathbf{1}_{A_n}(\omega)$. Selvästi $X_n \in B_1$ $\forall n$, ja kaikille $K > 0$*

$$\sup_n E_P\big(|X_n| \mathbf{1}(|X_n| > K)\big) = \sup_{n > K} E_P(|X_n|) = 1$$

Sovellus: odotusarvon derivointi parametrin suhteen

Lemma 5.3. *Olkoon $X_i : (\Omega_i, \mathcal{F}_i) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $i = 1, 2$ reaaliarvoisia satunnaismuuttujia eri todennäköisyysavaruuksissa. Silloin tulo $X(\omega_1, \omega_2) = X_1(\omega_1) X_2(\omega_2)$ on satunnaismuttuja tuloavaruudessa $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$.*

Tod. Olkoon $X_i(\omega_i) \ge 0$ $\forall \omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2$
(yleisemmin voidaan ensin hajottaa $X_i = (X_i^+ - X_i^-)$). Kun $t \ge 0$

$$\big\{(\omega_1, \omega_2) : \; X_1(\omega_1) X_2(\omega_2) \le t\big\} = \bigcup_{0 < q \in \mathbb{Q}} \left(\left\{ \omega_1 : \; X_1(\omega_1) \le \frac{t}{q} \right\} \cap \left\{ \omega_2 : \; X_2(\omega_2) \le q \right\} \right) \in (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \quad ,$$

ja Dynkinin lemmasta (**??**) seuraa

$$\big\{(\omega_1, \omega_2) : \; X_1(\omega_1) X_2(\omega_2) \in B\big\} \in (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \square$$

Lause 5.2. *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus jossa $\{Y(t, \omega) : t \in [a, b]\} \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on tasaisesti integroituva satunnaismuuttujen joukko, $a < b \in \mathbb{R}$. Oletamme sen lisäksi*

- *Kaikille $\omega \in \Omega$, kuvaus $t \mapsto Y(t, \omega)$ on jatkuva.*

- *Kaikille $t \in [a,b]$ kuvaus $\omega \mapsto Y(t,\omega)$ on $\mathcal{F}$-mitallinen.*

Tästä seuraa

1. *kuvaus $(t,\omega) \mapsto Y(t,\omega)$ on $(\mathcal{B}([a,b]) \otimes \mathcal{F}) \to \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mitallinen.*
2. *kuvaus $t \mapsto E_P(Y(t))$ on jatkuva.*
3. *Olkoon*

$$X(t,\omega) := \int_a^t Y(s,\omega) ds, \; t \in [a,b].$$

Silloin kaikissa $t \in (a,b)$ on olemassa jatkuva derivaatta

$$\frac{d}{dt} E_P\big(X(t)\big) = E_P\big(Y(t)\big) = E_P\left(\frac{d}{dt} X(t)\right)$$

Tod. Määritellään tuloavaruudessa $[a,b] \times \Omega$ satunnaismuuttujen jono

$$Y^{(N)}(t,\omega) = \sum_{k=0}^{(N-1)} Y\left(a + (b-a)\frac{k}{N}, \omega\right) \mathbf{1}\left(a + (b-a)\frac{k}{N} < t \leq a + (b-a)\frac{(k+1)}{N}\right), \quad N \in \mathbb{N}$$

Lemma (5.3) nojalla seuraa $Y^{(N)}$ on $(\mathcal{B}([a,b]) \otimes \mathcal{F})$-mitallinen, ja jatkuvuudesta seuraa

$$\lim_{N \uparrow \infty} Y^{(N)}(t,\omega) = Y(t,\omega) \quad \forall \omega \;,$$

siksi $Y(t,\omega)$ on myös $(\mathcal{B}([a,b]) \otimes \mathcal{F})$-mitallinen.

Koska $\lim_{s \to t} Y_s(\omega) = Y_t(\omega)$ ja tasaisen integroituvuuden oletuksesta, seuraa

$$|E_P(Y_t) - E_P(Y_s)| \leq E_P|Y_t - Y_s| \to 0 \quad \text{kun} \;\; s \to t.$$

Koska $\{Y_t : t \in [a,b]\}$ on tasaisesti integroituva, seuraa

$$\sup_{t \in [a,b]} E_P\big(|Y_t|\big) < +\infty$$

ja siksi $|Y(t,\omega)| \in L^1\big([a,b] \times \Omega, \mathcal{B}([a,b]) \otimes \mathcal{F}, dt \otimes P(d\omega)\big)$. Fubinin lause soveltuu

$$E_P(X_t) = E_P\left(\int_a^t Y(s) ds\right) = \int_{[a,b] \times \Omega} Y(s,\omega)\, ds \otimes P(d\omega) = \int_a^t E_P(Y(s)) ds$$

ja koska kuvaus $t \mapsto E_P(Y(t))$ on jatkuva, analyysin keskiarvon lauseesta

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta \to 0} \Delta^{-1} \big\{ E_P(X_{t+\Delta}) - E_P(X_t) \big\} \\ &= \lim_{\Delta \to 0} \Delta^{-1} \int_t^{t+\Delta} E_P(Y(s)) ds = E_P(Y(t)) \quad \square \end{aligned}$$

Esimerkki 5.1. *Olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega) \in \mathbb{R}$, jolle on olemassa $a < 0 < b$ jolle $m_X(t) := E_P(\exp(tX)) < \infty, \quad \forall t \in [a,b]$. Olkoon $a < -\varepsilon < 0 < \varepsilon < b$.*

Koska $x\exp(\varepsilon x) \le \exp(bx)$ kun $x \ge x'$ joka on yhtälön $x'/\log(x') = (b-\varepsilon)$ ratkaisu, seuraa

$$E_P(X^+ \exp(\varepsilon X)) \le x' \exp(\varepsilon x') + E_P(\exp(bX)) < +\infty$$

Vastaavasti, koska $x\exp(\varepsilon x) \le \exp(-ax)$ kun $x \ge x''$ joka ratkaisee $x''/\log(x'') = -(a+\varepsilon)$,

$$E_P(X^- \exp(-\varepsilon X)) \le x'' \exp(\varepsilon x'') + E_P(\exp(-aX)) < +\infty \ .$$

Seuraa

$$|X(\omega)| \exp(tX(\omega)) \le |X(\omega)| \Big\{ \exp(\varepsilon X(\omega)) + \exp(-\varepsilon X(\omega)) \Big\} \in L^1(P) \quad \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

ja kokoelma

$$\Big\{ X(\omega) \exp(tX(\omega)) : \ t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \Big\} \subseteq L^1(P)$$

on tasaisesti integroituva ,

$$\frac{d}{dt} m_X(t) = E_P\left(\frac{d}{dt} \exp(tX) \right) = E_P\big(X \exp(tX) \big) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

erityisesti kun $t = 0$

$$\frac{d}{dt} m_X(0) = E_P(X) \ .$$

Koska eskponentiaali funktio kasvaa polynoomien nopeammin, $\forall n \in \mathbb{N}$ seuraa satunnaismuuttujien joukon

$$\Big\{ X^n(\omega) \exp(tX(\omega)) : \ t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \Big\} \subseteq L^1(P)$$

tasainen integroituvuus, ja

$$\frac{d^n}{dt^n} m_X(t) = E_P\left(\frac{d^n}{dt^n} \exp(tX) \right) = E_P\big(X^n \exp(tX) \big) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

erityisesti kun $t = 0$

$$\frac{d^n m_X}{dt^n}(0) = E_P\big(X^n \big) \ .$$

Kuvaus $m_X(t) = E_P\big(\exp(tX)\big)$ kutsutaan momentti-generoiva funktioksi.

Esimerkki 5.2. *(Esscherin muunnos.)*

Olkoon $\Theta = \{ m_X(t) = E_P(\exp(tX)) < \infty \}$. Kun $t \in \Theta$ määritellään mitanvaihtokaavan kautta todennäköisyysmitta

$$P^{(t)}(A) = \frac{E_P\big(\exp(tX)\mathbf{1}_A\big)}{m_X(t)}, \quad \forall A \in \mathcal{F} \ .$$

Kun on olemassa $\varepsilon > 0$ jolle $[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \subseteq \Theta$, seuraa

$$E_{P(t)}(X^n) = \frac{E_P\big(X^n \exp(tX)\big)}{m_X(t)} = \frac{d^n m_X}{dx^n}(t)\,\frac{1}{m_X(t)}, \text{ erityisesti}$$

$$E_{P(t)}(X) = \frac{d}{dt}\log(m_X(t))$$

Tod. Kuten tapauksessa $t = 0$.

6 $L^p(\Omega)$ avaruudet

6.1 Epäyhtälöt

Määritelmä 6.1. *Kuvaus $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ on konveksi kun*

$$g\big(px + (1-p)y\big) \quad \leq \quad pg(x) + (1-p)g(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ p \in [0,1]$$

Lause 6.1. *Olkoon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksi funktio. Silloin g on jatkuva, ja jokaisessa pisteessä on olemassa derivaatat oikealta ja vasemmalta*

$$\nabla g^-(t) = \lim_{r\uparrow t} \frac{g(r)-g(t)}{r-t} \leq \nabla g^+(t) = \lim_{r\downarrow t} \frac{g(r)-g(t)}{r-t}$$

ja $\nabla g^{\pm}(s) \leq \nabla g^{\pm}(t)$ kun $s \leq t$.

Tod. kun $t \leq s \leq r$,

$$\frac{g(s)-g(t)}{s-t} \leq \frac{g(r)-g(t)}{r-t}$$

koska kun $p = (r-s)/(r-t) \in [0,1]$, $s = pt + (1-p)r$, konveksisuudesta

$$g(s) - g(r) \leq \big(g(t) - g(r)\big)\, p$$

Tästä seuraa että jokaiselle t, jono

$$(g(t+n^{-1}) - g(t))n \quad n \in \mathbb{N}$$

ei kasva ja siksi monotoninen raja on olemassa. Koska oikea ja vasen derivaatat $\nabla^{\pm} g(t)$ ovat olemassa, $g(t)$ on jatkuva jokaisessa $t \in \mathbb{R}$. Konveksisuudesta seuraa myös

$$\frac{g(s)-g(t)}{s-t} \leq \frac{g(r)-g(s)}{r-s}$$

kun $t \leq s \leq r$, siksi $\nabla^+ g(t) \leq \nabla^- g(r)$ kun $t < r$ $\quad\square$

Huomautus 6.1. *Koska derivaatat ovat ei-väheneviä,*

1. *Joukko*

$$D := \Big\{ t :\ \nabla^+ g(t) > \nabla^- g(t) \Big\}$$

on korkeintaan numeroituva.

2. jokaiselle $t \in \mathbb{R}$, $\delta \in [\nabla^- g(t), \nabla^+ g(t)]$

$$g(s) = g(t) + \int_t^s \nabla^{\pm} g(r) dr \geq g(t) + (s-t)\delta \qquad \forall s$$

Seuraa myös että g on konveksi jos ja vain jos on absoluttisesti jatkuva Lebesgue mitan suhteen ja Radon-Nikodymin-derivaatta $\frac{dg}{dx}(x)$ *on ei-vähenevä.*

Lause 6.2. *(Jensenin epäyhtälö) Olkoon* $X(\omega) \in \mathbb{R}$ *satunnaismuuttuja jolla* $E_P(|X|) < \infty$ *ja* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konveksikuvaus. Silloin*

$$g\big(E_P(X)\big) \quad \leq \quad E_P\big(g(X)\big)$$

R. Koska g on konveksi, sen oikea ja vasen derivaatat pisteessa $\mu = E_P(X)$ ovat olemassa. Kaikille $\delta \in [\nabla^- g(\mu), \nabla^+ g(\mu)]$

$$g(X(\omega)) \geq g(E_P(X)) + \delta\big\{X(\omega) - E_P(X(\omega))\big\}$$

ja väite seuraa ottaamalla odotusarvon $\square$

Huomautus Huomataan että Jensenin epäyhtälö on voimassa myös silloin kun integroidaan positiivisen mitan $\nu(dx)$ suhteen vaikka olisi $\nu(\mathbb{R}) = +\infty$. Siis kun g on konveksi,

$$\int_{\mathbb{R}} |x|\nu(dx) < \infty \Longrightarrow g\bigg(\int_{\mathbb{R}} x\nu(dx)\bigg) \leq \int_{\mathbb{R}} g(x)\nu(dx)$$

mutta on mahdollista että

$$\int_{\mathbb{R}} |x|\nu(dx) = \infty \text{ ja } \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\nu(dx) < \infty$$

Lemma 6.1. *Kun* $1 \leq p < r$, $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \supseteq L^r(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Tod. Olkoon $X \in L^r(P)$.
Kun $r = \infty$, $|X(\omega)|^p \leq \| X \|_\infty^p$ P-melkein varmasti ja väite seuraa.
Kun $r < \infty$, olkoon

$$Y_n(\omega) = n \wedge |X(\omega)|^p \in L^{r/p}(P) \ .$$

Koska $0 \leq Y_n(\omega) \leq n$ seuraa $Y_n(\omega) \in L^1(P)$.
Kuvaus $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ jolla $x \mapsto g(x) = x^{r/p}$ on konveksi. Jensenin epäyhtälöstä seuraa:

$$E_P(Y_n^{r/p}) \geq E_P(Y_n)^{r/p}$$

Monotonisen konvergenssi lauseesta, koska $0 \leq Y_n(\omega) \uparrow |X(\omega)|^p$ $\forall \omega$ seuraa

$$E_P(|X|^r) \geq E_P(|X|^p)^{r/p}.$$

Emme olisi voineet soveltaa Jensenin epäyhtälöä suoraan satunnaismuuttujalle $|X(\omega)|^p$ koska apriori oli epäselvää kuuluuko $L^{r/p}(P)$ avaruuteen. Siksi käytettiin kätkettyja muuttujia $\{Y_n\}$ $\square$

Huomautus 6.2. *Tässä on olemmaista että P on todennäköisyysmitta tai äärellinen mitta, koska silloin kun $\nu(\Omega) = \infty$ $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \nu) \nsubseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$, ja pelkään kätkäisemällä ei saadan integroituvia satunnaismuuttujia.*

Väite ei päde $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ avaruuksille silloin kun $\nu(\Omega) = \infty$.

Kun $\nu(\Omega) < \infty$ määritellään $P(A) = \nu(A)/\nu(\Omega)$ josta seuraa

$$\left\{ \int_\Omega |X(\omega)|^p \nu(d\omega) \right\}^{1/p} \leq \nu(\Omega)^{(r-p)/(rp)} \left\{ \int_\Omega |X(\omega)|^r \nu(d\omega) \right\}^{1/r}$$

siis $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \nu) \supseteq L^r(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ myös tässä tapauksessa. Tämä epäyhtälö ei kerro meille mitään kun $\nu(\Omega) = \infty$.

Lause 6.3. *(Cauchy Schwartzin epäyhtälö , $p = 2$)*
Olkoon $X(\omega), Y(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ silloin

1. *tulo $(X(\omega)Y(\omega)) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja*

$$\| XY \|_1 = E_P(|XY|) \leq \sqrt{E_P(X^2)}\sqrt{E_P(Y^2)} = \| X \|_2 \| Y \|_2$$

jossa yhtäsuuruisuus on voimassa jos ja vain jos $Y(\omega) = cX(\omega)$ P m.v. jollekin $c \in \mathbb{R}$.

Kun $E_P(XY) = 0$ sanomme että satunnaismuuttujat ovat ortogonaaliisia.

2. *Kolmion epäyhtälö on voimassa:*

$$\| X + Y \|_2 \leq \| X \|_2 + \| Y \|_2$$

1. Tod. Olkoon

$$X_n(\omega) = n \wedge |X(\omega)|, \quad Y_n(\omega) = n \wedge |Y(\omega)|$$

koska $0 \leq X_n(\omega), Y_n(\omega) \leq n$ $\forall \omega$, seuraa $(X_n(\omega)Y_n(\omega)) \in L^1(P)$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \left(tX_n(\omega) + Y_n(\omega) \right)^2 = t^2 X_n(\omega)^2 + Y_n(\omega)^2 + 2tX_n(\omega)Y_n(\omega)$$

Ottaamalla odotusarvoa (joka on olemassa ainakin katkaistetuille satunnaismuuttujille), seuraa että toisen asteen yhtälöllä

$$t^2 E_P(X_n)^2 + 2tE_P(X_nY_n) + E(Y_n^2) = 0$$

on korkeintaan yksi reaaliratkaisu, josta seuraa

$$E_P(X_nY_n)^2 - E(X_n^2)E(Y_n^2) \leq 0$$

Koska

$$0 \leq |X_n(\omega)Y_n(\omega)| \uparrow |X(\omega)Y(\omega)| \quad \forall \omega$$

seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta

$$E_P(|XY|)^2 - E(X^2)E(Y^2) \leq 0$$

2. Tod.

$$E_P((X+Y)^2) = E_P(X^2) + E_P(Y^2) + 2E_P(XY)$$
$$\leq E_P(X^2) + E_P(Y^2) + 2E_P(|XY|)$$
$$\leq E_P(X^2) + E_P(Y^2) + 2\sqrt{E_P(X^2)}\sqrt{E_P(Y^2)} = \left\{ \sqrt{E_P(X^2)} + \sqrt{E_P(Y^2)} \right\}^2 \quad \square$$

Lause 6.4. *Seuraavat identiteettit ovat voimassa $L^2(P)$ avaruudessa*

- *Kun $X, Y \in L^2(P)$,*

$$\| X+Y \|_2^2 + \| X-Y \|_2^2 = 2 \| X \|_2^2 + 2 \| Y \|_2^2 \qquad \textit{(Suunnikkaan identiteetti)}$$

- $$E_P(XY) = \frac{1}{4}\big(\| X+Y \|_2^2 - \| X-Y \|_2^2 \big) \qquad \textit{(Polarisaation identiteetti)}$$

Todistus: harjoitustehtävä.

Huomautus Voidaan myös osoittaa että kun normi $\| x \|$ toteuttaa suunnikkaan identiteetti, on olemassa skalaari tulo (x, y) jolla $\| x \|^2 = (x, x)$.

Jensenin epäyhtälön avulla Cauchy-Schwarz epäyhtälö yleistyy $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ avaruuksiin, jossa $1 < p < \infty$ ja μ on yleinen positiivinen mitta.

Huomataan myös että kun $X \in L^1(\mu), Y \in L^\infty(\mu)$, koska $|X(\omega)Y(\omega)| \leq |X(\omega)| \| Y \|_\infty$ seuraa suoraan että tulo $(XY) \in L^1(\mu)$.

Lause 6.5. *Olkoon $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ja $Y \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $1 \leq p <= \infty$ jossa $q = p/(p-1)$ on konjugattieksponentti joka toteuttaa $(q^{-1} + p^{-1}) = 1$. Silloin*

$$\int_\Omega |X(\omega)Y(\omega)|\mu(d\omega) \leq \left\{ \int_\Omega |X(\omega)|^p \mu(d\omega) \right\}^{1/p} \left\{ \int_\Omega |X(\omega)|^q \mu(d\omega) \right\}^{1/q}$$
$$= \| X \|_{L^p(\mu)} \| Y \|_{L^p(\mu)}$$

(Hölderin epäyhtälö).

Kun $X, Y \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $1 \leq P \leq \infty$

$$\| X+Y \|_{L^p(\mu)} \leq \| X \|_{L^p(\mu)} + \| Y \|_{L^p(\mu)}$$

(Minkowskin epäyhtälö).

Tod. (Hölder) Olkoon $1 < p < \infty$. Tietenkin voidaan olettaa $X(\omega) \geq 0$ $Y(\omega) \geq 0$ ja $E_P(|X|^p) > 0$ (muuten $X(\omega) = 0$ P-m.v. ja epäyhtälö seuraa.

Määritellään satunnaismuuttuja

$$\widetilde{Y}(\omega) := \frac{Y(\omega)}{X(\omega)^{p-1}} \mathbf{1}(X(\omega) > 0) \geq 0$$

ja todennäköisyysmitta

$$\widetilde{P}(d\omega) = \frac{X(\omega)^p}{\| X \|_{L^p(\mu)}} \mu(d\omega)$$

Jensenin epäyhtälöstä

$$E_{\widetilde{P}}(\widetilde{Y})^q \le E_{\widetilde{P}}(\widetilde{Y}^q)$$

kaikille $q \ge 1$ erityisesti kun $q = p/(p-1)$

$$\begin{aligned}
&\left\{\int_\Omega \frac{Y(\omega)}{X(\omega)^{p-1}}\,\mathbf{1}(X(\omega)>0)\,\frac{X(\omega)^p}{\| X \|^p_{L^p(\mu)}}\mu(d\omega)\right\}^q\\
&\le \int_\Omega \left\{\frac{Y(\omega)}{X(\omega)^{p-1}}\mathbf{1}(X(\omega)>0)\right\}^q \frac{X(\omega)^p}{\| X \|^p_{L^p(\mu)}}\mu(d\omega)\\
&\Longleftrightarrow \| X \|^{-pq}_{L^p(\mu)} \left\{\int_\Omega Y(\omega)X(\omega)\mu(d\omega)\right\}^q\\
&\le \| X \|^{-p}_{L^p(\mu)} \int_\Omega Y(\omega)^q X(\omega)^{(q(p-1)-p)}\mu(d\omega)
\end{aligned}$$

jossa $q(p-1)-p=0$. Seuraa

$$\int_\Omega Y(\omega)X(\omega)\mu(d\omega) \le \left\{\int_\Omega Y(\omega)^q\mu(d\omega)\right\}^{1/q} \| X \|^{(1-1/q)p}_{L^p(\mu)}$$

jossa $(1-1/q)p = 1$.

Tod. (Minkowski) Huomataan ensin että $\forall x,y \ge 0$,

$$(x+y)^p \le \big(2\max(x,y)\big)^p \le 2^p(x^p+y^p).$$

Siksi $X, Y \in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, myös $(X+Y) \in L^p(\mu)$.
Seuraa Hölderin epäyhtälöstä

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |X+Y|^p d\mu \le \int_\Omega |X||X+Y|^{p-1}d\mu + \int_\Omega |Y||X+Y|^{p-1}d\mu\\
&\le \big(\| X \|_{L^p(\mu)} + \| Y \|_{L^p(\mu)}\big)\ \|\ |X+Y|^{p-1}\ \|_{L^q(\mu)}\\
&= \big(\| X \|_{L^p(\mu)} + \| Y \|_{L^p(\mu)}\big)\ (\| X+Y \|_{L^p(\mu)})^{p/q}
\end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$\| X+Y \|^{(1-1/q)p}_{L^p(\mu)} \quad \le \quad \| X \|_{L^p(\mu)} + \| Y \|_{L^p(\mu)}$$

jossa $(1-1/q)p = 1 \quad \square$

Lause 6.6. *$\forall 1 \le p \le \infty$, $L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$ on* **täydellinen** *:*

jos $\{X_n(\omega)\} \in L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$ on Cauchy jono,
eli $\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon$ jolle $\| X_n - X_m \|_{L^p(P)} < \varepsilon$ kun $n,m \ge N_\varepsilon$,
on olemassa $X(\omega) \in L^p(P)$ jolle $\lim_{n\uparrow\infty} \| X_n - X \|_{L^p(P)}$

Tod. Tapaus jossa $p=\infty$ jää harjoitustehtäväksi.
Olkoon $p<\infty$ ja $\{X_n\} \subseteq L^p$ Cauchy jono. On olemassa jono (k_n) jolla

$$\| X_r - X_s \|_p \le 2^{-n} \quad \forall r,s \ge k_n$$

Kun $p \geq 1$ ja $r, s \geq k_n$ Jensenin epäyhtälöstä

$$E_P(|X_r - X_s|) \leq E_P(|X_r - X_s|^p)^{1/p} \leq 2^{-n}$$

Siksi asettamalla $X_{k_0}(\omega) = 0$,

$$X_{k_n}(\omega) = \sum_{m=1}^{n} (X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega))$$

on teleskoppisen summan esitys jossa

$$E_P\left(\sum_{m=1}^{\infty} |X_{k_m} - X_{k_{m-1}}|\right) < \infty$$

ja siksi P-melkein varmasti

$$\sum_{m=1}^{\infty} |X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega)| < \infty$$

ja sarja

$$\sum_{m=1}^{\infty} \big(X_{k_m}(\omega) - X_{k_{m-1}}(\omega)\big)$$

suppenee absoluttisesti.

Jotta $X(\omega)$ olisi määritelty kaikille ω:lle, olkoon

$$X(\omega) = \limsup_{n \to \infty} X_{k_n}(\omega).$$

Seuraa että $X(\omega)$ on satunnaismuuttuja ja $X_{k_n}(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti.

Kun $r > k_n$ ja $\forall t > n$

$$E_P(|X_r - X_{k_t}|^p) \leq 2^{-np}$$

Fatou lemmasta, koska $0 \leq |X_r(\omega) - X_{k_t}(\omega)|^p$,

$$E_P(|X_r - X|^p) = E_P(\liminf_t |X_r - X_{k_t}|^p) \leq \liminf_t E_P(|X_r - X_{k_t}|^p) \leq 2^{-np}$$

Tästä seuraa $X \in L^p$ ja $X_r \xrightarrow{L^p} X$ kun $r \to \infty$ $\square$

7 Funktionaalianalyysin peruskäsitteiden pikasanasto

1. Topologinen avaruus: $(E, \mathcal{T})$ jossa topologia $\mathcal{T} \subseteq 2^E$ on kaikkien avointen joukkojen kokoelma. Topologia an suljettu äärellisten leikkausten suhteen ja mielivaltaisten yhdistelmien suhteen. Avoimen joukon komplementti sanotaan suljetuksi.

   Olkoon $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$. Sanotaan että $x_n \to x$ topologiassa $\mathcal{T}$ jos

   $\forall U \in \mathcal{T}$ jolle $x \in U$, $\exists\, n_U$ jolle $x_n \in U$ $\forall n \geq n_U$.

2. $d : E \times E \to [0, +\infty]$ on metriikka jos

   - $d(e, e') = 0$ jos ja vain jos $e = e'$
   - $d(e, e') = d(e', e)$ (symmetrisyys)
   - $d(e, e'') \le d(e, e') + d(e', e'')$ (kolmion epäyhtälö)

3. Topologinen avaruus $(E, \mathcal{T})$ on metrinen jos on olemassa metriikka (etäisyys) $d : E \times E \to [0, +\infty]$, jonka suhteen avoimet pallot generoivat topologian $\mathcal{T}$:n, eli:

   $B(e, r) = \{e' : d(e, e') < r\} \in \mathcal{T} \ \forall\, e \in E, r > 0$

   ja kaikille $x \in U$, $x \in E, U \in \mathcal{T}$ on olemassa $r > 0$ jolle $x \in B(e, r) \subseteq U$.

   Metrisessa avaruudessa, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ on *Cauchy jono* kun $\forall \varepsilon > 0$ on olemassa n_ε jolle $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ kun $n, m \ge n_\varepsilon$.

   Sanotaan että metrinen avaruus (E, d) on *täydellinen* jos kaikille Cauchy jonoille $\{x_n\}$ on olemassa rajaarvo $x \in E$.

4. Olkoon E reaali-vektoriavaruus, eli kun $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$, myös $\lambda x \in E$, $(x + y) \in E$.

   Kuvaus $\| \cdot \| : E \to [0, +\infty)$ on *normi* kun

   i) $\| x \| = 0 \in \mathbb{R} \iff x = \mathbf{0} \in E$ ii) $\| \lambda x \| = |\lambda| \ \| x \|$

   iii) $\| x + y \| \le \| x \| + \| y \|$.

   Kaikki normatut vektoriavaruudet ovat metriset, metriikalla $d(x, y) := \| x - y \|$, joka generoi normi-konvergenssin topologian. Samalla avaruudella voi olla useita käyttökelpoisia topologioita.

5. esi-Hilbertin avaruus on normi-avaruus jossa normi on peräisin skalaaritulosta $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jossa $\| x \|^2 := \langle x, x \rangle$. Reaaliarvoinen skalaaritulo on symmetrinen $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

   bilineaarinen $\langle \lambda x + \lambda' x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda' \langle x', y \rangle$, ja positiivinen $\langle x, x \rangle \ge 0$, jolla $\langle x, x \rangle = 0 \iff 0$.

6. Täydellinen normiavaruus on Banachin avaruus ja täydellinen esi-Hilbertin avaruus on Hilbertin avaruus.

8 Projektio $L^2(P)$ avaruudessa

Lause 8.1. *Olkoon $H \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ aliavaruus joka on* **suljettu**, *eli jos $\{X_n\} \subseteq H$ ja on olemassa $X \in L^2(P)$ jolla $\| X_n - X \|_{L^2(P)} \to 0$, seuraa että $X \in L^2(P)$.*

Kaikille $X(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on olemassa ortogonaalinen projektio H-aliavaruuteen $Y(\omega) = (\Pi_H X)(\omega) \in H$ jolla

- $$E_P((X - Y)^2) = \Delta := \inf_{W \in H} E_P((X - W)^2)$$
- $E_P((X - Y)W) = 0 \ \forall W \in H$

Projektio Y on P-melkein varmasti yksikäsitteinen.

Huomautus 8.1. *Muistetaan että euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^d$ on määritelty vektoreiden skalaari tulo*

$$\langle X,Y\rangle_{\mathbb{R}^d} = \sum_{\omega=1}^{d} X(\omega)Y(\omega) = d\cdot \sum_{\omega=1}^{d} X(\omega)Y(\omega)P(\{\omega\}) = E_P(XY)d$$

jossa $P(\omega) = 1/d$ on tasainen todennäköisyys äärellisessä avaruudessa $\Omega = \{1,\dots,d\}$. Sanomme että vektorit $X,Y \in \mathbb{R}^d$ ovat kohtisuoria (merkintä $X \perp_{\mathbb{R}^d} Y$), kun $\langle X,Y\rangle_{\mathbb{R}^d} = 0$.

Tämä geometrinen käsite yleistyy abstraktissa todennäköisyysavaruudessa $(\Omega,\mathcal{F})$ kun varustetaan $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ skalaaritulolla

$$\langle X,Y\rangle_{L^2(P)} = E_P(XY) = \int_\Omega X(\omega)Y(\omega)P(d\omega)$$

ja tulkitaan satunnais-muuttujat $(X(\omega):\omega\in\Omega)$ ääretönulotteisinä vektoreina. Satunnais-muuttujat $X,Y \in L^2(P)$ ovat kohtisuoria (merkintä $X \perp_P Y$), kun $E_P(XY)=0$.

Tod. Koska $0 \in H$, $\Delta \le E_P(|X|^2) < \infty$, ja on olemassa jono $(Y_n : n\in\mathbb{N}) \subseteq H$ jolla $\| X - Y_n \|_2 \to \Delta$.

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $\bar{n}$ jolla kun $n \ge \bar{n}$

$$\Delta \le E_P((X-Y_n)^2) < \Delta + \varepsilon$$

Suunnikkaan yhtälöstä seuraa

$$2 \| (Y_m - Y_n)/2 \|_2^2 = \| X - Y_m \|_2^2 + \| X - Y_n \|_2^2 - 2 \| X - (Y_m - Y_n)/2 \|_2^2$$

jossa $(Y_n - Y_m)/2 \in H$, ja seuraa

$$\| X - (Y_n - Y_m)/2 \| \ge \Delta$$

Kun $n,m \ge \bar{n}$

$$2 \| (Y_m - Y_n)/2 \|_2^2 \le 2\varepsilon$$

Siksi $(Y_n) \subseteq H$ on Cauchy jono $L^2(P)$:ssa. Koska $L^2(P)$ on täydellinen on olemassa $Y \in L^2(P)$ jolla $Y_n \xrightarrow{L^2} Y$, ja koska H on suljettu aliavaruus seuraa $Y \in H$.

Olkoon $W \in H \setminus \{0\}$. $\forall t \in \mathbb{R}$, $(Y + tW) \in H$

$$\| X - Y \|_2^2 \le \| X - Y - tW \|_2^2 = \| (X-Y) \|_2^2 + t^2 \| W \|_2^2 - 2tE_P((X-Y)W)$$
$$\iff t^2 \| W \|_2^2 - 2tE_P((X-Y)W) \ge 0 \quad \forall t \ge 0$$

josta seuraa $E_P((X-Y)W) = 0$.

Jos $\widetilde{Y}(\omega) \in H$ on myös projektio, ottamalla $W = (Y - \widetilde{Y}) \in H$

$$0 = E_P(XW) - E_P(XW) = E_P(YW) - E_P(\widetilde{Y}W) = E_P((Y-\widetilde{Y})W) = E_P((Y-\widetilde{Y})^2)$$

josta seuraa $Y(\omega) = \widetilde{Y}(\omega)$ P-m.v. $\square$

Lemma 8.1. *L^2-projektio on lineaarinen operaattori: kun $X,Z \in L^2(P)$,$a \in \mathbb{R}$ ja H on suljettu aliavaruus,*

$$\Pi_H(X+Z) = \Pi_H X + \Pi_H Z, \quad \Pi_H(aX) = a\Pi_H(X)$$

9 Ehdollinen odotusarvo

Olkoon $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali-σ-algebra.

Silloin $L^p(\Omega, \mathcal{G}, P) \subseteq L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\forall 0 \leq p \leq \infty$, ja kun $p > 0$, $L^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$ on suljettu aliavaruus.

Tod. Olkoon $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$ ja $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ joilla $E_P(|X_n - X|^p) \to 0$, Seuraa että $X \implies X_n \stackrel{P}{\to} X$ ja on olemassa alijono jolla $\{n_k\} : X_{n_k}(\omega) \to X(\omega)$ P m.v. . Olkoon $\widetilde{X}(\omega) := \liminf_k X_{n_k}(\omega) \in L^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Seuraa että $X_n \stackrel{L^P}{\to} \widetilde{X}$ ja siksi $X(\omega) = \widetilde{X}(\omega)$ P-m.v.

Kun $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja $H = L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ seuraa projektio lauseesta (8.1) että on olemassa ortogonaalinen projektio

$$Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega) := \big(\Pi_{L^2(\Omega,\mathcal{G},P)} X\big)(\omega)$$

joka kutsutaan *ehdolliseksi odotusarvoksi* jolla

- $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$
- $E_P(XW) = E_P(YW) \quad \forall W \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$

Lemma 9.1. *Ehdollinen odotusarvo on positiivinen operaattori:*
Olkoon $0 \leq X(\omega) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *ali-*σ*-algebra. Silloin*

$$Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega) \geq 0 \qquad P\text{-}m.v.$$

Tod. Koska $L^\infty(P) \subseteq L^2(P)$ ehdollinen odotusarvo $Y(\omega)$ on olemassa L^2-projektiona. Olkoon $A = \{\omega : Y(\omega) < 0\} \in \mathcal{G}$. Koska $\mathbf{1}_A(\omega) \in L^\infty(P) \subseteq L^2(P)$,

$$0 \leq E_P(X\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}(Y < 0)) = -E_P(Y^-) \leq 0$$

ja väite seuraa.

Ehdollisen odotusarvon määritelmä laajennetaan $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avaruuteen:

Teoreema 9.1. *(Kolmogorovin määritelmä) Kun* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, ja* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *on ali-*σ*-algebra, on olemassa ehdollinen odotusarvo* $Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ *jolla* $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ *ja*

$$E_P(X\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Ehdollinen odotusarvo on P*-m.v. yksikäsitteinen.*

Tod. Voidaan olettaa että $X(\omega) \geq 0$ $\forall\omega$, muuten käytämme ensin hajotelmaa $X(\omega) = X(\omega)^+ - X(\omega)^-$ ja sitten määrittelemme

$$E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) = E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) - E_P(X^-|\mathcal{G})(\omega)$$

Olkoon $0 \leq X_n(\omega) = X(\omega) \wedge n \uparrow X(\omega)$ kun $n \uparrow \infty$. Koska $X_n \in L^\infty$ seuraa että $X_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja projektio lauseesta seuraa että on olemassa $Y_n \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ jolla

$$E_P(X_n\mathbf{1}_A) = E_P(Y_n\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Seuraa lemmasta (9.1) että $Y_n(\omega) \geq 0$ P-m.v. Kun $n \geq m$ $(X_n(\omega) - X_m(\omega)) \geq 0$ josta seuraa

$$(Y_n(\omega) - Y_m(\omega)) = E_P(X_n|\mathcal{G})(\omega) - E_P(X_m|\mathcal{G})(\omega) = E_P(X_n - X_m|\mathcal{G})(\omega) \geq 0 \quad P\text{-m.v.}$$

Olkoon $Y(\omega) = \limsup_n Y_n(\omega)$. Seuraa että $Y_n(\omega) \uparrow Y(\omega)$ P-m.v. ja monotonisen konvergenssin lauseesta, $\forall A \in \mathcal{G}$

$$E_P(X\mathbf{1}_A) = \lim_{n\uparrow\infty} E_P(X_n\mathbf{1}_A) = \lim_{n\uparrow\infty} E_P(Y_n\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}_A)$$

Jos $\widetilde{Y}(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ toteuttaa Kolmogorovin määritelmää, koska $A = \{\omega : Y(\omega) > \widetilde{Y}(\omega)\} \in \mathcal{G}$,

$$0 \leq E_P((Y - \widetilde{Y})\mathbf{1}_A) = E_P(X\mathbf{1}_A) - E_P(X\mathbf{1}_A) = 0$$

seuraa että $Y(\omega) \leq \widetilde{Y}(\omega)$ P-m.v., samoin seuraa että $Y(\omega) \geq \widetilde{Y}(\omega)$ ja siksi $Y(\omega) = \widetilde{Y}(\omega)$ P-m.v.

Tehtävä 9.1. *Osoita että (9.1) pätee jos ja vain jos*

$$E_P(XW) = E_P(YW) \quad \forall W \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

Tehtävä 9.2. *Olkoon $\mathcal{G} = \sigma(A_1, \dots, A_n) \subseteq \mathcal{F}$ äärellisesti generoitu ali σ-algebra, jossa $\{A_1, \dots, A_n\}$ on Ω:n $\mathcal{F}$-mitallinen ositus, $A_i \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ kun $i \neq j$.*

Olkoon $X(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Silloin

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{E_P(X\mathbf{1}_{A_i})}{P(A_i)}\mathbf{1}_{A_i}(\omega) := \sum_{i=1}^n E_P(X|A_i)\mathbf{1}_{A_i}(\omega) \tag{9.1}$$

jossa $E_P(X|A) = E_P(X\mathbf{1}_A)/P(A)$ on elementaarinen ehdollinen odotusarvo, joka saa mielivaltainen arvo (esimerkiksi 0) silloin kun $P(A) = 0$. Osoita että (9.1) toteuttaa Kolmogorovin ehdollilsen odotuarvon määritelmän.

Huom: Kolmogorovin ehdollinen odotusarvo σ-algebran ehdolla $E_P(X|\mathcal{G})(\omega)$ on satunnaismuuttuja, kun elementaarinen odotusarvo tapahtuman ehdolla $E_P(X|A)$ on vakio joka on hyvin määritelty vain silloin kun $P(A) > 0$.

10 Ehdollinen odotusarvo Radon-Nykodim derivaattana

Olkoon $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Määritellään merkkinen mitta

$$\mu_X(A) = E_P(X\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Huomataan että $\mu_X(A) = 0$ silloin kun $A \in \mathcal{F}$ ja $P(A) = 0$, eli $\mu \ll P$ σ-algebrassa $\mathcal{F}$, ja $X(\omega) = \frac{d\mu_X}{dP}(\omega)$ on vastaava Radon-Nikodymin derivaatta.

Olkoon $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali σ-algebra. Erityisesti $\mu \ll P$ σ-algebrassa $\mathcal{G}$. Radon-Nikodymin lauseesta seuraa että on olemassa R-N derivaatta

$$Y(\omega) := \frac{d\mu_X|_{\mathcal{G}}}{dP|_{\mathcal{G}}}(\omega)$$

jossa $Y(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ joka toteuttaa mitanvaihtokaavaa

$$E_P(X\mathbf{1}_A) = \mu_X(A) = E_P(Y\mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Kolmogorovin määritelmästä seuraa että $Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega)$.

Siis ehdollisen odotusarvon olemassa olo seuraa R-N lauseesta. Kuitenkin, koska emme ole vielä todistaneet R-N lauseetta käytimme L^2-projektiota.

11 Mitä voidaan sanoa kun $E_P(|X|) = \infty$?

Olkoon $0 \leq X(\omega) \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mutta $E_P(X) = \infty$. Myös tässä tapauksessa monotonisen konvergenssilauseen kautta seuraa että on olemassa ehdollinen odotusarvo $Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega) \in [0, +\infty]$ joka on $\mathcal{G}$-mitallinen joka totetuttaa $\forall A \in \mathcal{G}$.

$$E_P(X\mathbf{1}_A) = E_P(Y\mathbf{1}_A) \in [0, +\infty]$$

Toki $Y(\omega)$ voi saada myös arvoa $+\infty$, joka tapauksessa $E_P(Y) = E_P(X) = \infty$.

Yleisemmin olkoon $X(\omega) = (X(\omega)^+ - X(\omega)^-)$, jossa $E_P(|X|) = \infty$. Silloin ehdollinen odotusarvo

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) := E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) - E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) \in [-\infty, +\infty]$$

on hyvin määritelty vain joukon

$$U := \big\{\omega : E_P(X^+|\mathcal{G})(\omega) = E_P(X^-|\mathcal{G})(\omega) = +\infty\big\}$$

ulkopuolella. Kun käy hyvin joskus $P(U) = 0$.

12 Ehdollisen odotusarvon ominaisuudet

1. Monotoninen konvergenssi :

   $$0 \leq X_n(\omega) \uparrow X(\omega) \Longrightarrow 0 \leq E_P(X_n|\mathcal{G})(\omega) \uparrow E_P(X|\mathcal{G})(\omega) \quad P \text{ m.v.}$$

2. $E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\big) = E_P(X)$

3. Kun $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$,

   $$E_P(X|\mathcal{H})(\omega) = E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\big|\mathcal{H}\big)(\omega) \ P \text{ m.v.}$$

4. Jos $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$, ja $X, (XY) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, seuraa

   $$E_P(YX|\mathcal{G})(\omega) = Y(\omega)E_P(X|\mathcal{G})(\omega)$$

5. jos σ-algebra $\mathcal{H}$ on P-riippumaton σ-algebrasta $\sigma(X) \vee \mathcal{G}$,

   $$E_P(X|\mathcal{G} \vee \mathcal{H}) = E_P(X|\mathcal{G})$$

   Tod. $\forall G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}$, seuraa

   $$E_P(X\mathbf{1}_G\mathbf{1}_H) = E_P(X\mathbf{1}_G)P(H) = E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_G\big)P(H) = E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_G\mathbf{1}_H\big)$$

   ja väite seuraa koska $\mathcal{G} \vee \mathcal{H} = \sigma(G \cap H : G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H})$.

13 Säännöllinen ehdollinen todennäköisyys ja ytimet

Tapahtuman $A \in \mathcal{F}$ ehdollinen todennäköisyys ehdolla $\mathcal{G}$ σ-algebra on luonnollisesti

$$P\big(A\big|\mathcal{G}\big)(\omega) = E_P\big(\mathbf{1}_A\big|\mathcal{G}\big)(\omega)$$

joka on yksikäsitteinen modulo P-nolla mittaisia joukkoja. Koska ehdollinen odotusarvo on ei-negatiivinen operaattori, seuraa $P\big(A\big|\mathcal{G}\big)(\omega) \in [0,1]$ P-melkein varmasti.

Voidaanko sanoa että P-melkein varmasti, kuvaus $A \mapsto P\big(A\big|\mathcal{G}\big)(\omega) \in [0,1]$ on todennäköisyysmitta ?

Olkoon $\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}$ tapatuhmien jono jolla $A_n \downarrow \emptyset$. Seuraa ehdollisen odotusarvon monotonisen konvergenssin lauseesta että on olemassa joukko N jolla $P(N) = 0$

$$P(A_n|\mathcal{G})(\omega) \downarrow 0 \quad \forall \omega \in N^c \tag{13.1}$$

Tämä joukko voi toki riippua $\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}$ jonosta, ja kun yleisesti jonojen määrä on ylinumeroituva, ei mikään takaa että löytyy sellainen P-nolla mittainen joukko N jossa (13.1) pätee samaan aikaan kaikille tapahtumien jonoille joilla $A_n \downarrow \emptyset$.

Siis ehdollinen todennäköisyys ei ole automaattisesti P-melkein varmasti σ-additiivinen.

Määritelmä 13.1. *Olkoon* $(\Omega,\mathcal{F})$ *ja* $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}})$ *todennäköisyysavaruudet.*

Kuvaus $K : \Omega \times \widetilde{\mathcal{F}} \to [0,1]$ *on* $(\Omega,\mathcal{F}) \to (\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}})$ *todennäköisyys ydin kun*

- *kaikille kiinnitetyillle* $\omega \in \Omega$ *kuvaus* $K(\omega,\cdot) : \widetilde{\mathcal{F}} \to [0,1]$ *jossa* $\widetilde{A} \mapsto K(\omega,\widetilde{A})$ *on todennäköisyysmitta.*
- *kaikille kiinnitetyillle tapahtumille* $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{F}}$ *kuvaus* $K(\cdot,\widetilde{A}) : \Omega \to [0,1]$ *jossa* $\omega \mapsto K(\omega,\widetilde{A})$ *on* $\mathcal{F}$*-mitallinen.*

Määritelmä 13.2. *Olkoon* $\widetilde{\Omega} = \Omega$ *ja* $\widetilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Ehdollisella todennäköisyydellä $(\widetilde{A},\omega) \mapsto P(\widetilde{A}|\mathcal{G})(\omega)$ *jossa* $\widetilde{A} \in \widetilde{F}$ *on säännöllinen versio jos on olemassa* $(\Omega,\mathcal{G}) \to (\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}})$ *todennäköisyys-ydin* $K(\omega,\widetilde{\mathcal{A}})$*, joka on* $\mathcal{G}$*-mitallinen* ω*:n suhteen, ja*

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) = \int_{\widetilde{\Omega}} X(\widetilde{\omega})K(\omega,d\widetilde{\omega})$$

kaikille $X \in L^1(\Omega,\widetilde{\mathcal{F}},P)$

Huomautus 13.1. *määritelmässä esintyy ali-*σ *algebra* $\widetilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$ *koska joskus ehdollisen todennäköisyyden säännöllinen versio on olemassa vain jollekin pienelle* σ*-algebralle eikä alkuperäiselle* σ*-algebralle* $\mathcal{F}$*. Esimerkki:* $\widetilde{\mathcal{F}} = \sigma(X)$ *jossa* X *on (*$\mathcal{F}$*-mitallinen) reaali-arvoinen satunnaismuuttuja.*

Määritelmä 13.3. *Todennäköisyysavaruus* $(\Omega,\mathcal{F})$ *on Borel jos on olemassa mitallinen bijektio* $f : (\Omega,\mathcal{F}) \to [0,1],\mathcal{B}([0,1])$ *jossa käänteiskuvaus* f^{-1} *on myös mitallinen.*

Teoreema 13.1. *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyyskolmikko.*

Olkoon $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ mitallinen kuvaus, jossa $(\Omega', \mathcal{F}')$ on Borelin avaruus, ja $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali σ-algebra

On olemassa $(\Omega, \mathcal{G}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ todennäköisyys ydin $K(\cdot, \cdot)$ joka on ehdollisen todennäköisyyden säännöllinen versio: P melkein varmasti,

$$P(X \in D|\mathcal{G})(\omega) := E_P(\mathbf{1}(X \in D)|\mathcal{G})(\omega) = K(\omega, D) \qquad \textit{kaikille } D \in \mathcal{F}'$$

Todistus sivutetaan, katso Kallenbergin kirjasta Foundations of Modern Probability, Thm 6.3, 6.4.

Huomautus 13.2. *Meidän onneksi $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ on Borel avaruus, siis satunnaisvektorin ehdollisella todennäköisyydellä on aina säännöllinen versio.*

14 Ehdollisen odotusarvon laskenta P-riippumattomuuden oletuksen nojalla

Lause 14.1. *Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$, olkoon $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali σ-algebra, $Y(\omega)$ $\mathcal{G}$-mitallinen satunnaismuuttuja, joka saa arvot mitallisessa avaruudessa $(S, \mathcal{S})$, ja olkoon $X(\omega) \in (\widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{S}})$ riippumaton $\mathcal{G}$ σ-algebrasta.*

Olkoon $f : (\widetilde{S} \times S) \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja Borel-mitallinen kuvaus.

Silloin ehdollisella odotusarvolla on integraali-esitys

$$E_P\big(f(X,Y)\big|\mathcal{G}\big)(\omega) = E_P\big(f(X,y)\big)\Big|_{y=Y(\omega)} = \int_{\widetilde{S}} f(x, Y(\omega)) P_X(dx) \tag{14.1}$$

jossa $P_X(B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\})$.

Tod. Olkoon

$V := \big\{ f : (\widetilde{S} \times S) \to \mathbb{R}$ Borel mitalliset ja rajoitetut funktiot joille pätee 14.1 $\big\}$

Osoitamme ensi että V on monotoninen luokka. Ehdollisen odotusarvon määritelmästä seuraa 14.1 on voimassa funktiolle $f(x,y)$ jos ja vain jos $\forall G \in \mathcal{G}$

$$E_P\big(f(X,Y)\mathbf{1}_G\big) = \int_\Omega \bigg\{ \int_{\widetilde{S}} f(x, Y(\omega)) P_X(dx) \bigg\} \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega)$$

Selvästi V on vektori avaruus koska odotusarvo on lineaarinen. Jos $\{f_n(x,y) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq V$ ja $0 \le f_n(x,y) \uparrow f(x,y)$ jossa $f(x,y)$ on rajoitettu, seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta että $f(x,y) \in V$.

Monotonisen luokan lauseesta seuraa että jos $\mathcal{I} \subseteq V$ on π-luokka, V sisältää kaikki rajoitettu $\sigma(\mathcal{I})$ mitalliset funktiot. Väite on osoitettu kun näytämme että 14.1 pätee funktiolle $f(x,y) = \mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_D(y)$: $\forall G \in \mathcal{G}$ riippumattomuudesta seuraa

$$\begin{aligned}
&E_P\big(\mathbf{1}_B(X)\mathbf{1}_D(Y)\mathbf{1}_G\big) = P_X(B)P(\{Y \in D\} \cap G) \\
&= \int_\Omega \bigg\{ \int_\Omega \mathbf{1}_B(X(\widetilde{\omega}))P(d\widetilde{\omega}) \bigg\} \mathbf{1}_D(Y(\omega))\mathbf{1}_G(\omega)P(d\omega) = \\
&\int_\Omega \bigg\{ \int_\Omega \mathbf{1}_B(X(\widetilde{\omega}))\mathbf{1}_D(Y(\omega))P(d\widetilde{\omega}) \bigg\} \mathbf{1}_G(\omega)P(d\omega) = \\
&\int_\Omega \bigg\{ \int_\Omega f\big(X(\widetilde{\omega}), Y(\omega)\big)P(d\widetilde{\omega}) \bigg\} \mathbf{1}_G(\omega)P(d\omega)
\end{aligned}$$

joka tarkoittaa $\mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_D(y) \in V$ $\square$.

15 Ehdollisen odotusarvon laskenta mitan-vaihdon avulla: Bayesin kaava

Lemma 15.1. *Ehdollinen odotusarvon on itse-adjungoitu operaattori, eli kun $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ on ali σ-algebra, $\forall A \in \mathcal{F}$*

$$E_P\big(X\ E_P(\mathbf{1}_A|\mathcal{G})\big) = E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\ E_P(\mathbf{1}_A|\mathcal{G})\big) = E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\ \mathbf{1}_A\big)$$

Tod. Suoraan ehdollisen odotusarvon ominaisuuksista.

Olemme esittäneet kaksi tapausta jossa osaamme laskea ehdollisia odotusarvoja: silloin kun σ-algebralla $\mathcal{G}$ on numeroituva määrä atomeja, ja riippumattomuuden nojalla lauseessa 14.1.

Yleisemmin voidaan joskus paluattaa ehdollisen odotusarvon laskeminen lauseen 14.1 tilanteeseen mitan-vaihdon avulla. Ensin esitämme mitanvaihtokaavan ehdolliselle odotusarvolle:

Teoreema 15.1. *(Abstrakti Bayesin kaava). Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$, olkoon $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ja $P \overset{\mathcal{F}}{\ll} Q$ todennäköisyysmitat joilla $Q(A) = 0 \Longrightarrow P(A) = 0$ kun $A \in \mathcal{F}$.*

Radon-Nikodym lauseesta seuraa että on olemassa Radon-Nikodym derivaatta eli satunnaismuuttuja

$$0 \le Z(\omega) := \frac{dP}{dQ}(\omega)\ \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, Q)$$

jolle odotusarvon mitanvaihtokaava on voimassa:

$$E_P(X) = E_Q(XZ) \qquad \forall X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

Silloin ehdolliselle odotusarvolle pätee Bayesin kaava:

$$E_P\big(X\big|\mathcal{G}\big)(\omega) = \frac{E_Q\big(XZ\big|\mathcal{G}\big)(\omega)}{E_Q\big(Z\big|\mathcal{G}\big)(\omega)} \quad \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

Tod. Olkoon $G \in \mathcal{G}$. Mitanvaihto kaavasta odotusarvolle ja ehdollisen odotusarvon määritelmästä seuraa

$$\begin{aligned} &E_P\big(X\mathbf{1}_G\big) = E_Q\big(ZX\mathbf{1}_G\big) = E_Q\big(E_Q(ZX\mathbf{1}_G|\mathcal{G})\big) = E_Q\big(E_Q(ZX|\mathcal{G})\mathbf{1_G}\big) \\ &= E_Q\bigg(\frac{E_Q(Z|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})}E_Q(ZX|\mathcal{G})\mathbf{1}_G\bigg) = E_Q\bigg(Z\frac{E_Q(ZX|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})}\mathbf{1}_G\bigg) = E_P\bigg(\frac{E_Q(ZX|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})}\mathbf{1}_G\bigg) \quad \square \end{aligned}$$

Esimerkki 15.1. *(Perinteinen Bayesin kaava) Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$, olkoon ja $X(\omega) \in \mathbb{R}^d, Y(\omega) \in \mathbb{R}^m$ satunnaismuuttujia joilla $\mathcal{F} = \sigma(X, Y)$, $\mathcal{G} = \sigma(Y)$.*

Olkoon $P \overset{\mathcal{F}}{\ll} Q$ todennäköisyysmitat joilla $X \overset{Q}{\perp\!\!\!\perp} Y$ ja olkoon

$$0 \le Z(\omega) := z(X(\omega), Y(\omega)) = \frac{dP}{dQ}(\omega)\ \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, Q)$$

jollakin Borel-mitallisilla funktiolla $z(x,y) \geq 0$. Olkoon $f(x,y)$ rajoitettu Borel-mitallinen kuvaus. Bayesin kaavasta

$$\begin{aligned}
E_P\big(f(X,Y)\big|\mathcal{G}\big)(\omega) &= \frac{E_Q\big(f(X,Y)Z\big|\mathcal{G}\big)(\omega)}{E_Q\big(Z\big|\mathcal{G}\big)(\omega)} \\
&= \frac{\int_\Omega f(X(\widetilde{\omega}),Y(\omega))\; z(X(\widetilde{\omega}),Y(\omega))P(d\widetilde{\omega})}{\int_\Omega z(X(\widetilde{\omega}),Y(\omega))P(d\widetilde{\omega})} \\
&= \int_\Omega f(X(\widetilde{\omega}),Y(\omega))K(\omega,d\widetilde{\omega}) \quad \textit{jossa} \\
K(\omega,d\widetilde{\omega}) &= \frac{z(X(\widetilde{\omega}),Y(\omega))}{\int_\Omega \; z(X(\omega'),Y(\omega))P(d\omega')}P(d\widetilde{\omega})
\end{aligned}$$

on ehdollisen todennäköisyyden ydin. Voidaan myös integroida suoraan $\mathbb{R}^d$ avaruudessa jossa $X(\omega)$ saa arvoja:

$$E_P\big(f(X,Y)\big|\mathcal{G}\big)(\omega) = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} f(x,Y(\omega))z(x,Y(\omega))P_X(dx)}{\int_{\mathbb{R}^d} z(x,Y(\omega))P_X(dx)} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,Y(\omega))k(Y(\omega),dx)$$

jossa

$$k(y,dx) = \frac{z(x,y)}{\int_{\mathbb{R}^d} z(x',y)P_X(dx')}P_X(dx)$$

Kun satunnaisvektorin (X,Y) jakaumalla on tiheysfunktio $(d+m)$-ulotteisen Lebesgue mitan suhteen, siis $P(X \in dx, Y \in dy) = p_{X,Y}(x,y)dxdy$, Fubini lauseesta seuraa että silloin myös marginaalijakaumilla P_X ja P_Y on tiheydet,

$$\begin{aligned}
P(X \in dx) = p_X(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^m} p_{X,Y}(x,y)dy \\
P(Y \in dy) = p_Y(y)dy &= \int_{\mathbb{R}^d} p_{X,Y}(x,y)dx
\end{aligned}$$

ja voidaan valita todennäköisyysavaruudeksi $\Omega = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ todennäköisyysmitoilla

$$Q_{X,Y}(dx,dy) := (P_X \otimes P_Y)(dx,dy) = p_X(x)p_Y(y)dxdy, \; P_{X,Y}(dx,dy) = p_{X,Y}(y)dxdy$$

Oletuksesta $P_{X,Y} \ll (P_X \otimes P_Y)$, seuraa että Radon Nykodim derivaatta on

$$\frac{dP_{X,Y}}{dQ_{X,Y}}(x,y) = \frac{dP_{X,Y}}{d(P_X \otimes P_Y)}(x,y) = z(x,y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)p_Y(y)}$$

Voidaan silloin kirjoittaa ehdollisen todennäköisyyden ytimen tiheysfunktioiden avulla

$$k(y,dx) = \frac{z(x,y)}{\int_{\mathbb{R}^d} z(x',y)P_X(dx')}P_X(dx) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}dx = p_{X|Y}(x|y)dx$$

jossa viimeinen yhtälö on ehdollisen tiheysfunktion määritelmä. Perinteinen Bayesin kaava on

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{p_X(x)p_{Y|X}(y|x)}{p_Y(y)} \quad .$$

15.1 Ehdollisen odotusarvon laskenta tuloavaruudessa

Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyyskolmikko ja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Tuloavaruudessa $(\Omega \times \Omega)$ varustettuna tulo σ-algebralla $\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}$ määritellään Dynkinin laajennuslauseen kautta todennäköisyysmitta $\mathbb{P}$ jolla

$$\mathbb{P}(H \times G) = P(H \cap G) \quad \forall H \in \mathcal{H}, G \in \mathcal{G}$$

Lause 15.1. *Olkoon* $X(\omega, \omega') \in L^1(\Omega \times \Omega, \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}, \mathbb{P})$.

Silloin

$$\iint\limits_{\Omega \times \Omega} X(\omega, \omega') \mathbb{P}(d\omega \times d\omega') = \int_\Omega X(\omega, \omega) P(d\omega) \tag{15.1}$$

Tod. Kun $X(\omega, \omega') = \mathbf{1}_H(\omega) \mathbf{1}_G(\omega')$ jossa $H \in \mathcal{H}$ ja $G \in \mathcal{G}$, väite seuraa suoraan $\mathbb{P}$:n määritelmästä. Olkoon

$$V := \big\{ X(\omega, \omega') : \text{ rajoitetut ja } \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}\text{-mitalliset s.m. joilla (15.1) on voimassa } \big\}$$

Selvästi V on vektori avaruus, ja monotonisen konvergenssin lauseesta seuraa että V on monotoninen luokka. Koska V sisältää satunnaismuuttujat $\mathbf{1}_H(\omega)\mathbf{1}_G(\omega')$ jossa $H \in \mathcal{H}$ ja $G \in \mathcal{G}$, monotonisen luokan lauseesta seuraa sisältää myös kaikki rajoitetut $\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}$-mitalliset satunnaismuuttujat.

Yleisemmin kun X on ei-rajoitettu ja $\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}$-mitallinen voidaan ensin hajottaa $X = (X^+ - X^-) \in L^1(\Omega \times \Omega, \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}, P^{\otimes 2})$ satunnais-muuttujen jonolla $X_n = (X^+ \wedge n) - (X^- \wedge n)$, ja käytää monotonisen konvergenssin lausetta erikseen positiivisille ja negatiivisille puolille $\square$

Esimerkki 15.2. *Olkoon* $\xi(\omega), \eta(\omega) \in \mathbb{R}$ *satunnaismuuttujat* $\mathcal{H} = \sigma(\xi)$, $\mathcal{G} = \sigma(\eta)$ *ja*

$f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ *Borel-mitallinen kuvaus. Silloin*

$$\int_\Omega f(\xi(\omega), \eta(\omega)) P(d\omega) = \iint\limits_{\Omega \times \Omega} f(\xi(\omega), \eta(\omega')) \mathbb{P}(d\omega, d\omega')$$

Oletamme nyt että σ-algebrat $\mathcal{H}$ ja $\mathcal{G}$ ovat P-riippumattomia eli

$$P(H \cap G) = P(H)P(G) \text{ kun } H \in \mathcal{H} \text{ ja } G \in \mathcal{G}$$

Silloin $\mathbb{P} = P \otimes P = P^{\otimes 2}$ eli

$$\mathbb{P}(H \times G) = P(H \cap G) = P(H)P(G) \quad \forall H \in \mathcal{H}, G \in \mathcal{G}$$

Tästä esityksestä seuraa suoraan että kun $G \in \mathcal{G}$,

$$E_P(X \mathbf{1}_G) = \int_\Omega X(\omega, \omega) \mathbf{1}_G(\omega) P(d\omega) = \iint\limits_{\Omega \times \Omega} X(\omega, \omega') \mathbf{1}_G(\omega') P^{\otimes 2}(d\omega, d\omega')$$

$$= \int_\Omega \left\{ \int_\Omega X(\omega, \omega') P(d\omega) \right\} \mathbf{1}_G(\omega') P(d\omega')$$

ehdollisen odotusarvon määritelmästä seuraa

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega') = \int_\Omega X(\omega, \omega') P(d\omega)$$

joka vastaa kaavan (14.1)

Yleisemmin, kun σ-algebrat $\mathcal{H}$ ja $\mathcal{G}$ eivät ole riippumattomia P-mitan suhteen, oletamme että $\mathbb{P} \ll P^{\otimes 2}$ tulo σ-algebrassa $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{G})$.

Seuraa Radon-Nikodymin lauseesta että on olemassa $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{G})$-mitallinen Radon-Nikodymin derivaatta

$$0 \leq Z(\omega, \omega') := \frac{d\mathbb{P}}{dP^{\otimes 2}}(\omega, \omega') \ \in \ L^1(\Omega \times \Omega, \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}, P^{\otimes 2})$$

jolla mitan vaihdon kaava on voimassa kaikille $X \in L^1(\Omega \times \Omega, \mathcal{H} \otimes \mathcal{G}, \mathbb{P})$

$$\iint\limits_{\Omega \times \Omega} X(\omega, \omega')\mathbb{P}(d\omega, d\omega') = \iint\limits_{\Omega \times \Omega} X(\omega, \omega')Z(\omega, \omega')P^{\otimes 2}(d\omega, d\omega') =$$
$$\int_\Omega \left(\int_\Omega X(\omega, \omega')Z(\omega, \omega')P(d\omega) \right) P(d\omega') = \int_\Omega X(\omega, \omega)Z(\omega, \omega)P(d\omega)$$

Kun $G \in \mathcal{G}$ saadaan

$$\int_\Omega X(\omega, \omega)\mathbf{1}_G(\omega)P(d\omega) =$$
$$\iint\limits_{\Omega \times \Omega} X(\omega, \omega')\mathbf{1}_G(\omega')\mathbb{P}(d\omega, d\omega') = \int_\Omega \left(\int_\Omega X(\omega, \omega')Z(\omega, \omega')P(d\omega) \right) \mathbf{1}_G(\omega')P(d\omega') =$$
$$\int_\Omega \left(\int_\Omega Z(\omega, \omega')P(d\omega) \right) Y(\omega')\mathbf{1}_G(\omega')P(d\omega')$$

jossa

$$Y(\omega') := Y(\omega, \omega') := \frac{\int_\Omega X(\omega, \omega')Z(\omega, \omega')P(d\omega)}{\int_\Omega Z(\omega, \omega')P(d\omega)}$$

on $\{\emptyset, \Omega\} \otimes \mathcal{G}$-mitallinen.

$$= \iint\limits_{\Omega \times \Omega} Z(\omega, \omega')Y(\omega')\mathbf{1}_G(\omega')P^{\otimes 2}(d\omega \times d\omega') = \iint\limits_{\Omega \times \Omega} Y(\omega')\mathbf{1}_G(\omega')\mathbb{P}(d\omega, d\omega')$$
$$= \int_\Omega Y(\omega')\mathbf{1}_G(\omega')P(d\omega')$$

Ehdollisen odotusarvon määritelmästä seuraa $Y(\omega') = E_P(X|\mathcal{G})(\omega')$.

Huomataan että myös

$$\int_\Omega X(\omega, \omega')Z(\omega, \omega')P(d\omega)$$

toteuttaa Kolmogorovin ehdollisen odotusarvon määritelmän

Tämä ei tuo ristiriitaa koska tässä tapauksessa

$$\int_\Omega Z(\omega, \omega')P(d\omega) \equiv 1$$

koska

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Omega \times G) &= P^{\otimes 2}(\Omega \times G) = P(G) \quad \forall G \in \mathcal{G} \\
\iff P(G) &= \int_\Omega \Big(\int_\Omega Z(\omega, \omega') P(d\omega) \Big) \mathbf{1}_G(\omega') P(d\omega') \quad \forall G \in \mathcal{G}
\end{aligned}$$

Samoin,

$$\int_\Omega Z(\omega, \omega') P(d\omega') \equiv 1$$

Huomautus 15.1. *Tässä kappaleessa yleistettiin lause 14.1 ja esimerkki 15.1 tilanteeseen jossa $\mathcal{H}$ ja $\mathcal{G}$ ovat yleisiä ali-σ-algebrat eikä välttämättä satunnaisvektoreiden virittämiä.*

16 Ehdollistaminen nollamittaisiin tapahtumiin: varoitus

Olkoon $X(\omega), Y(\omega)$ riippumattomia standardi gaussisia satunnaismuuttujia, $E_P(X) = E_P(Y) = 0$, $E_P(X^2) = E_P(Y^2) = 1$. Olkoon

$$W(\omega) = (X(\omega) - Y(\omega)), \quad Z(\omega) = \mathbf{1}(Y(\omega) \neq 0)\, \frac{X(\omega)}{Y(\omega)}$$

Olkoon $N = \{\omega : \ Y(\omega) = 0\}$.
Selvästi $P(N) = 0$ ja

$$N^c \cap \{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\} = N^c \cap \{\omega : W(\omega) = 0\} = N^c \cap \{\omega : Z(\omega) = 1\}$$

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rajoitettu Borel mitallinen kuvaus.

$$\begin{aligned}
&i) \qquad E_P(f(X)|\{X = Y\}) = \frac{\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)\delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dxdy}{\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dxdy} \\
&ii) \qquad E_P(f(X)|W = 0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)p_{X|W}(x|0)dx \\
&iii) \qquad E_P(f(X)|Z = 1) = \int_{\mathbb{R}} f(x)p_{X|Z}(x|1)dx
\end{aligned}$$

eivät ole valttämättä samasuuruisia. Näytämme että $i) = ii) \neq iii)$.

i) Perustuu tulkintaan

$$E_P(f(X)|\{X=Y\}) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} E_P\big(f(X)\big|\{|X-Y|<\varepsilon\}\big)$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{E_P\big(f(X)\mathbf{1}\{|X-Y|<\varepsilon\}\big)}{P(|X-Y|<\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_Y(y)dy\Big) f(x)p_X(x)dx}{\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_Y(y)dy\Big) p_X(x)dx}$$

$$= \frac{\int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Big((2\varepsilon)^{-1}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_Y(y)dy\Big) f(x)p_X(x)dx}{\int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Big((2\varepsilon)^{-1}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_Y(y)dy\Big) p_X(x)dx}$$

$$= \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x)p_Y(x)p_X(x)dx}{\int_{\mathbb{R}} p_Y(x)p_X(x)dx} = \frac{\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)\delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dxdy}{\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dxdy}$$

Tässä δ_0 on Diracin delta distribuutio jolla on ominaisuus

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\delta_0(x)dx = g(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x)F(dx)$$

kaikille jatkuville funktioille g, ja $F(x) = \mathbf{1}(x \geq 0)$. Diracin δ on porrasfunktion F:n derivaatta distribution mielessä.

Lasketaan:

i) $$\frac{\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)\delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dxdy}{\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \delta_0(x-y)p_X(x)p_Y(y)dxdy} = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x)p_X(x)p_Y(x)dx}{\int_{\mathbb{R}} p_X(x)p_Y(x)dx} = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2}dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2}dx$$

ii) Bayesin kaavasta

$$p_{X|W}(x,w) = \frac{p_X(x)p_{W|X}(x,w)}{p_W(w)} = \frac{p_X(x)p_{W|X}(x,w)}{p_W(w)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}x^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}(w-x)^2)\Big(\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp(-\frac{1}{4}w^2)\Big)^{-1}$$

koska $p_{W|X}(w|x) = p_Y(w-x)$ ja W on gaussinen ja $E(W) = E(X)-E(Y) = 0$, $E(W^2) = E(X^2) + E(Y^2)$, siis

$$p_{W|X}(w|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\big(-\frac{(w-x)^2}{2}\big)$$

joka on gaussisen jakauman $\mathcal{N}(x,1)$ tiheysfunktio.

Tästä seuraa

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)p_{X|W}(x|0)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2}dx$$

joka täsmää i) arvon kanssa.

Kuitenkin

$$p_{Z|X}(z|x) = p_Y(x/z)\left|\frac{dy}{dz}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\bigl(-\frac{x^2}{2z^2}\bigr)\ \frac{|x|}{z^2}$$

muuttujan vaihdolla $z = x/y$, ja

$$\begin{aligned}
p_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} p_{Z|X}(z|x)p_X(x)dx = \frac{1}{z^2 2\pi}\int_{\mathbb{R}} |x|\exp\bigl(-\frac{x^2}{2}(1+z^{-2})\bigr)dx \\
&= \frac{1}{z^2 2\pi}2\int_0^\infty r^{1/2}\exp\bigl(-\frac{r}{2}(1+z^{-2})\bigr)\frac{r^{-1/2}}{2}dr \\
&= \frac{1}{z^2 2\pi}\int_0^\infty \exp\bigl(-\frac{r}{2}(1+z^{-2})\bigr)dr = \frac{1}{z^2 2\pi}\frac{2}{(1+z^{-2})} = \frac{1}{(1+z^2)\pi}
\end{aligned}$$

muuttujan vaihdolla $r = x^2$. Täman jakauman nimi on Student-t vapausasteella 1.

Tästä seuraa Bayesin kaavalla

$$\begin{aligned}
p_{X|Z}(x|z) &= \frac{p_X(x)p_{Z|X}(x|z)}{p_Z(z)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\bigl(-\frac{x^2}{2z^2}\bigr)\ \frac{|x|}{z^2}}{(1+z^2)^{-1}\pi^{-1}} \\
&= \frac{(1+z^2)|x|}{2}\exp\bigl(-\frac{x^2}{2}(1+z^{-2})\bigr)
\end{aligned}$$

Kun $z = 1$ saadaan $p_{X|Z}(x|1) = |x|\exp(-x^2)$ ja

$$E_P(f(X)|Z=1) = \int_{\mathbb{R}} f(x)p_{X|Z}(x|1)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)|x|\exp(-x^2)dx$$

joka on eri kuin integraalien i) ii) arvo.

Eri nolla mittaisilla tapahtumilla voi olla eri esityksiä eri satunaaismuuttujen avulla, ja vastaavien ehdollisten odotusarvojen pistettäiset arvot saattaavat olla eriläisiä. Tämä ei ole ristiriidassa todennäköisyysteorian kanssa koska aina voidaan vaihtaa ehdollisen odotusarvon arvot pistettäin nolla mittaisissa joukoissa.

17 Martingaalit

Määritelmä 17.1. *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ todennäköisyysavaruus, ja $\mathbb{T} = \mathbb{N}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+, \dots$ aikaindeksien joukko.*

Filtraatio $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T})$ on σ-algebroiden kokoelma, joka on ajan suhteen ei-vähenevä:

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \quad \forall 0 \le s \le t$$

Määritelmä 17.2. *Stokastinen prosessi $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{T})$ on sopiva (tai adaptoitu) filtration $\mathbb{F}$:n suhteen, kun $X_t(\omega)$ on $\mathcal{F}_t$-mitallinen $\forall t \in \mathbb{T}$.*

Määritelmä 17.3. *Diskreetti ajassa, eli kun $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$, stokastinen prosessi $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{T})$ on ennustettava filtration $\mathbb{F}$:n suhteen, kun $X_t(\omega)$ on $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallinen $\forall t \in T$.*

Määritelmä 17.4. *Sanotaan että prosessi $X = (X_t : t \in \mathbb{T})$ on (ali,yli)-martingaali filtraation $\mathbb{F}$:n suhteen kun*

1. *(X_t) on $\mathbb{F}$-sopiva*
2. *$X_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ $\forall t \in \mathbb{T}$,*
3. $$E_P(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s \quad \forall s \le t,$$
   vastaavasti $\le$ ylimartingaalin tapauksessa ja $\ge$ alimartingaalin tapauksessa.

Huomataan että martingaalin ominaisuus riippuu sekä todennäköisyysmitasta että filtraatiosta. Ylimartingaali on ajan-suhteen "keskimäärin" ei-kasvava, alimartingaali on "keskimäärin" ei-vähenevä, martingaali on sekä ylimartingaali että alimartingaali.

Lemma 17.1. *Diskreetti ajassa ($\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$), määritelmässä 17.4 ominaisuus (3) seuraa kaikille $s \le t$ kun*

$$E_P(M_t|\mathcal{F}_{t-1}) = M_{t-1} \quad \forall t$$

Tod. Induktiolla, kun $t = s$,

$$E_P(M_t|\mathcal{F}_s) = E_P(M_s|\mathcal{F}_s) = M_s$$

Muuten voidaan käyttää induktiota $r = (t-s)$:n suhteen, olettamalla että lemma on voimassa kaikille arvoille t, s joilla $(t-s) < r$, kun $(t-s) = r$ seuraa

$$\begin{aligned} &E_P(M_t|\mathcal{F}_s) = E_P(E_P(M_t|\mathcal{F}_{s+1})|\mathcal{F}_s) \\ &= E_P(M_{s+1}|\mathcal{F}_s) = M_s \end{aligned}$$

Samoin voidaan tarkistaa myös ali- ja yli- martingaalin epäyhtälöitä.

Esimerkki 17.1. *Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N}) \subseteq L^1(P)$ riippumattomien satunnaismuuttujen jono jolla $E(X_t) = \mu \in \mathbb{R}$, ja olkoon $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_t)$*

$S_t = (X_1 + \dots + X_t)$ on $\mathbb{F}$-alimartingaali kun $\mu > 0$, ja $\mathbb{F}$-ylimartingaali kun $\mu > 0$, ja $\mathbb{F}$-martingaali kun $\mu = 0$.

Esimerkki 17.2. *Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N})$ riippumattomien satunnaismuuttujen jono jolla $X_t(\omega) \ge 0$ P-m.v. ja $E(X_t) = \mu \in [0, +\infty)$, ja olkoon $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_t)$*

Silloin tuloprosessi $M_t = (X_1 X_2 \dots X_t)$ on $\mathbb{F}$-alimartingaali kun $\mu > 1$, ja $\mathbb{F}$-ylimartingaali kun $\mu < 1$, ja $\mathbb{F}$-martingaali kun $\mu = 1$.

Esimerkki 17.3. *Olkoon $X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ $t \in \mathbb{N}$, diskreetti aikainen Markovin ketju alkujakaumalla $\pi(dx)$ ja siirtymäytimellä $K(x, dy)$.*

Olkoon $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_t)$.

Määritellään operaattori

$$(Kf)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y) K(y, dx) = E_x(f(X_1)) = E_P(f(X_t)|X_{t-1} = x)$$

Osoita että

$$M_t(f) = \sum_{s=1}^{t} (f(X_s) - (Kf)(X_{s-1}))$$

on $\mathbb{F}$-martingaali kun $f(x)$ on rajoitettu ja Borel mitallinen.

Teleskoppisen summan esityksestä,

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{s=1}^{t} (f(X_s) - f(X_{s-1}) =$$

$$f(X_0) + \sum_{s=1}^{t} (f(X_s) - Kf(X_{s-1}) + \sum_{s=1}^{t} ((Kf)(X_{s-1}) - f(X_{s-1}))$$
$$= f(X_0) + M_t(f) + A_t(f)$$

saadaan Doobin hajotelma jossa $A_t(f)$ on ennustettava prosessi

Lause 17.1. *Olkoon (X_t) martingaali ja (Y_t) ennustettava prosessi filtraation $(\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N})$ suhteen.*

Määritellään martingaalimuunnos tai aika-diskreetti stokastinen integraali

$$M_t = \sum_{s=1}^{t} Y_s (X_s - X_{s-1}) = \sum_{s=1}^{t} Y_s \Delta X_s$$

Kun $E(|Y_s \Delta M_s|) < \infty$ $\forall s \in \mathbb{N}$, (M_t) on martingaali.

Tod. Määritelmästä seuraa että M_t on $\mathbb{F}$-sopiva ja integroituvuus ehto seuraa kolmio epäyhtälöstä. Tarkistamme että martingaali-ominaisuus on voimassa:

$$E_P(M_t - M_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) = E_P(Y_t(X_t - X_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}) = Y_t E_P(X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$$

jossa käytettiin integrandin (Y_t):n $\mathbb{F}$-ennustettavuutta.

Integroituuvus voidaan tärkistää Hölderin epäyhtälöllä

$$E(|Y_s \Delta M_s|) \leq \| Y_s \|_{L_p} \| \Delta M_s \|_{L_q}$$

kun $p, q \in [1, +\infty]$ ovat konjugaatti-eksponentteja joilla $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Vedonlyönti-tulkinta Oletamme että hetkellä $(t-1)$ on mahdollisuus ostaa tai myydä arpajaisia hinnalla X_{t-1}. Hetkellä t arpajaisen arvo on X_t, satunnaisvoittolla $\Delta X_t = (X_t - X_{t-1})$ (negatiivinen voitto tulkitaan on tappioksi). Tässä $Y_t(\omega)$ on vedonlyonti strategia, ennustettava siinä mielessä että on $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallinen kun ΔX_t on $\mathcal{F}_t$-mitallinen, siis kun lyödään vetoa ei tiedetä mitä tapahtuu seuraavaksi. M_t on pelajan pääoma ja

$$M_t - M_0 = \sum_{s=1}^{t} Y_s \Delta X_s$$

on pelajan voitto. Reilussa pelissa $E_P(\Delta X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ ja arpajaisen arvoprosessi on martingaali. Lause 17.1 kertoo että niin kauan kun integroituvuus-ehdot ovat voimassa ja pelistrategia on ennustettava, pelajan voitto-prosessi on martingaali. Kun X_t on ylimartingaali (kuten roulette-pelissä), ja ennustettava pelistrategia on rajoitettu ja ei-negatiivinen, voittoprosessi on edelleen ylimartingaali.

Määritelmä 17.5. *Satunnais-hetki $\tau(\omega) \in \mathbb{T} = \mathbb{N}$ on $(\mathcal{F}_t)$-pysähdyshetki kun*

$$\{\omega : \tau(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

18 Doobin Martingaali-konvergenssi lause

Martingaali $(M_t : t \in \mathbb{N})$ joka on rajoitettu $L^1(P)$ normissa, suppenee P-melkein varmastiä kun $t \to +\infty$.

Teoreema 18.1. *(Doob)*
Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N})$ ylimartingaali jolla $\sup_{t\in\mathbb{N}} E_P(X_t^-) < \infty$,
(tässä $x^- = \max(-x, 0)$).
Silloin

$$\sup_{t\in\mathbb{N}} E_P(|X_t|) < \infty$$
$$\lim_{t\to\infty} X_t(\omega) = X_\infty(\omega) \qquad P\text{-}m.v.$$

jossa $X_\infty(\omega) \in L^1(\Omega)$

Huomautus : vaikka $X_\infty(\omega) \in L^1(\Omega)$, ilman tasaisen integroituvuuden ehtoa, konvergenssi $L^1(P)$-mielessä ei seura.

Tod. Koska X_t on ylimartingaali, $\forall t \in \mathbb{N}$

$$E(X_t^+) \le E(X_0) + E(X_t^-)$$

joten

$$\sup_t E(X_t^+) \le E(X_0) + \sup_t E(X_t^-)$$

jossa $E(|X_0|) < \infty$, siksi $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ on rajoitettu $L^1(P)$ avaruudessa.

Olkoon $a < b$, ja määritellän pysähdyshetkien jono

$$\sigma_0(\omega) = \inf\{s \in \mathbb{N} : X_s(\omega) < a\}$$

(ensimmäinen a tason alituksen hetki)

$$\tau_i(\omega) = \inf\{s > \sigma_i(\omega) : X_s(\omega) \ge b\},$$
$$\sigma_i(\omega) = \inf\{s > \tau_{i-1}(\omega) : X_s(\omega) < a\}, \ i \ge 1$$

joilla $0 \le \sigma_i < \tau_i < \sigma_{i+1} < \dots$ Nämä ovat pysähdyshetkiä, koska $\forall t \in \mathbb{N}$ tapahtumat

$$\{\omega : \sigma_i(\omega) \le t\} \quad \text{ja} \quad \{\omega : \tau_i(\omega) \le t\}$$

riippuvat ainoastaan prosessin polusta $(X_1(\omega), \dots, X_t(\omega))$, ja siksi ovat $\mathcal{F}_t$-mitallisia.

Määritellään sijoitusstrategia

$$C_t(\omega) = \begin{cases} 1 & t \in (\sigma_i, \tau_i] \text{ joillekin } i \in \mathbb{N} \\ 0 & t \in (\tau_i, \sigma_{i+1}] \end{cases}$$

Koska τ_i ja σ_i ovat pysähdyshetkiä, kaikille $t \in N$

$$\{C_t = 1\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{t \in (\sigma_i, \tau_i]\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{\sigma_i \le (t-1)\} \cap \{\tau_i \le (t-1)\}^c \in \mathcal{F}_{t-1}$$

Koska $C_t(\omega) \in \{0,1\}$ on ei-negatiivinen ja rajoitettu ennustettava prosessi, seuraa että martinagaali muunnos

$$Y_t(\omega) = \sum_{s=1}^{t} C_s(\omega)\Delta X_s$$

on myös ylimartingaali, erityisesti $E(Y_t) \le E(Y_0) = 0$.

Koska

$$Y_t \ge (b-a)U_{[a,b]}([0,t]) - (X_t - a)^-$$

ja koska $E(Y_t) \le E(Y_0) = 0$, seuraa *Doobin ylitysten-epäyhtälö (upcrossing-inequality)*

$$E_P\big(U_{[a,b]}([0,t])\big) \le \frac{1}{(b-a)} E_P\big((X_t - a)^-\big)$$

Koska $U_{[a,b]}([0,t])$ on ei-vähenevä, $\forall \omega$ on olemassa

$$U_{[a,b]}([0,\infty),\omega) := \lim_{t\to\infty} U_{[a,b]}([0,t]) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$
$$(X_t - a)^- = \max(a - X_t, 0) \le |a| + X_t^-$$

seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta

$$E_P\big(U_{[a,b]}([0,\infty))\big) = \lim_{t\to\infty} E_P\big(U_{[a,b]}([0,t])\big) \le \frac{1}{(b-a)}\left(|a| + \sup_{t\in\mathbb{N}} E_P(X_t^-)\right) < \infty$$

Erityisesti $U_{[a,b]}([0,\infty),\omega) < \infty$ P-melkein varmasti.

Olkoon

$$\begin{aligned} N &= \big\{\omega : \lim\inf_{t\to\infty} X_t(\omega) \lneq \limsup_{t\to\infty} X_t(\omega)\big\} \\ &= \bigcup_{a<b\in Q} \big\{\omega : \lim\inf_{t\to\infty} X_t(\omega) \le a < b \le \limsup_{t\to\infty} X_t(\omega)\big\} \\ &= \bigcup_{a<b\in\mathbb{Q}} \big\{U_{[a,b]}([0,\infty),\omega) = \infty\big\} \end{aligned}$$

on P-nolla tapahtumien numeroituva yhdiste, joten $P(N) = 0$.

Tämä tarkoittaa että P-melkein varmasti $(X_t(\omega))_{t\in\mathbb{N}}$ suppenee kohti raja-arvoa $X_\infty(\omega) := \limsup_{t\to\infty} X_t(\omega), \quad \forall\omega \in \Omega$.

A priori $X_\infty(\omega) \in [-\infty, \infty]$, mutta Fatoun lemmasta seuraa

$$E(|X_\infty|) = E(\liminf_t |X_t|) \le \liminf_t E(|X_t|) \le \sup_t E(|X_t|) < \infty,$$

siksi $|X_\infty(\omega)| < \infty$ P-melkein varmasti $\square$.

Seuraus 18.1. *Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N})$ alimartingaali jolla $E_P(X_t^+) < \infty$. Silloin, P-melkein varmasti $\exists \lim_{t\to\infty} X_t(\omega) = X_\infty(\omega) \in L^1(P)$.*

Tod. Doobin konvergenssi lause soveltuu ylimartingaalille $(-X_t)$.

Seuraus 18.2. *Kun X_t on ei-negatiivinen ylimartingaali, on olemassa P-melkein varmasti raja-arvo $X_\infty(\omega) := \lim_{t\to\infty} X_t(\omega) \geq 0$ jolla $E_P(X_\infty|\mathcal{F}_t)(\omega) \leq X_t(\omega)$ $\forall t < \infty$.*

Tod. Doobin martingaalikonvergenssilause soveltuu koska $X_t^-(\omega) \equiv 0$. Fatou lemmasta ehdolliselle odotusarvolle

$$\begin{aligned} &E_P(X_\infty|\mathcal{F}_t) = E_P(\liminf_u X_u|\mathcal{F}_t) \\ &\leq \liminf_u E_P(X_u|\mathcal{F}_t) \leq X_t \end{aligned}$$

(X_t) on ylimartingaali laajennetulla indeksijoukolla $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ □

18.1 Tasaisesti integroituvat martingaaalit

Lause 18.1. *Olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Kokoelma*

$$\big\{E_P(X|\mathcal{G})(\omega) : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \text{ ali } \sigma\text{-algebra}\big\}$$

on tasaisesti integroituva.

Tod. Koska $\{X\} \subseteq\in L^1(P)$ on tasaisesti integroituva, $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ jolla $E_P(|X|\mathbf{1}_A) < \varepsilon$ kun $P(A) < \delta$.

Olkoon $Y(\omega) = E_P(X|\mathcal{G})(\omega)$, seuraa että $E_P(|Y|) \leq E_P(|X|) < \infty$

$$KP(|Y| > K) \leq E_P(|Y|) \leq E_P(|X|)$$

josta seuraa $P(|Y| > K) < \delta$ kun $K > E_P(|X|)\delta^{-1}$, ja

$$\begin{aligned} &\varepsilon \geq E_P(|X|\mathbf{1}(|Y| > K)) = E_P\big(E_P(|X||\mathcal{G})\mathbf{1}(|Y| > K|)\big) \\ &\geq E_P\big(|Y|\mathbf{1}(|Y| > K)\big) \end{aligned}$$

on voimassa samaan aikaan kaikille ali σ-algebroille $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Seuraus 18.3. *Olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ja $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T})$ filtraatio. Silloin*

$$M_t(\omega) = E_P(X|\mathcal{F}_t)(\omega) \quad t \in \mathbb{T}$$

on tasaisesti integroituva martingaali.

Teoreema 18.2.

- *$\mathbb{F}$-martingaali $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva jos ja vain jos on olemassa satunnaismuuttuja $M_\infty(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$*

  jossa $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_t$ ja

  $M_t(\omega) \to M_\infty(\omega)$ P-melkein varmasti ja $L^1(P)$ mielessä.

- *Kun $\mathbb{F}$-martingaali $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on ei-negatiivinen, erityisesti se on ei-negatiivinen ylimartingaali, seuraa laueseesta 18.2 että on olemassa $M_\infty(\omega) \in L^1(P)$ jolla $M_t(\omega) \to M_\infty(\omega)$ P-melkein varmasti ja $E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t)(\omega) \leq M_t(\omega)$ $\forall t \in \mathbb{N}$.*

  Silloin $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva ja $M_t(\omega) = E_P(M_\infty|\mathcal{F}_t)(\omega)$ jos ja vain jos $E_P(M_0) = E_P(M_\infty)$.

Tod. Koska $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on rajoitettu $L^1(P)$:ssa koska on tasaisesti integroituva ja

$$\sup_t E_P(|M_t|) \le K + \sup_{t \in \mathbb{N}} E_P\big(|X_t| \mathbf{1}(|X_t| > K)\big) < \infty.$$

Doobin martingaali konvergenssi lause soveltuu

$$\lim_{t \to \infty} M_t(\omega) = M_\infty(\omega) \qquad P\text{-m.v.}$$

jossa määritellään $\forall \omega$

$$M_\infty(\omega) := \lim \inf_{t \to \infty} M_t(\omega)$$

$L^1(P)$ konvergenssin karakterisaatiosta seuraa että $M_t \overset{L^1(P)}{\to} M_\infty$.

Olkoon $A \in \mathcal{F}_t$, koska $(M_t(\omega) \mathbf{1}_A(\omega) : t \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva, seuraa kun $\forall u \ge t$

$$E_P(M_t \mathbf{1}_A) = E_P(M_u \mathbf{1}_A) \to E_P(M_\infty \mathbf{1}_A) \text{ kun } u \uparrow \infty \qquad \forall A \in \mathcal{F}_t$$

joka tarkoittaa $E_P(M_\infty | \mathcal{F}_t)(\omega) = M_t(\omega)$.

Kun ă(M_t) on ei-negatiivinen martingaali, seuraa että

$$M_t - E_P(M_\infty | \mathcal{F}_t) \ge 0$$

jos

$$0 = E_P(M_t) - E_P(M_\infty) = E_P\big(M_t - E_P(M_\infty | \mathcal{F}_t)\big)$$

seuraa että

$$M_t = E_P(M_\infty | \mathcal{F}_t)$$

ja se on tasaisesti integroituva.

Huomautus $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva martingaali, jos ja vain jos (M_t) on martingaali laajennetussa aikaindeksijoukolla $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Esimerkki 18.1. *Olkoon $X_t(\omega) \ge 0$ ja P-riippumattomia, joilla $E_P(X_t) = 1$ $\forall t \in \mathbb{N}$. Silloin $M_t(\omega) = X_1(\omega) X_2(\omega) \dots X_t(\omega)$ on $\mathbb{F}$-martingaali jossa $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$.*

Koska M_t on ei-negatiivinen ylimartingaali, seuraa että P-melkein varmasti $\lim_{t \to \infty} M_t(\omega) = M_\infty(\omega) \in L^1(p)$, ja $M_t(\omega) \ge E_P(M_\infty | \mathcal{F}_t)(\omega)$.

Jos $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva, seuraa $M_t(\omega) = E_P(M_\infty | \mathcal{F}_t)(\omega)$.

18.2 Martingaalin takaperäinen konvergenssi

Olkoon $(\mathcal{F}_t : t \in -\mathbb{N})$ filtraatio. Kun $-\infty \le s \le t \le 0$

$$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_t \supseteq \mathcal{F}_s \supseteq \mathcal{F}_{-\infty} := \bigcap_{t \in -\mathbb{N}} \mathcal{F}_t$$

jossa $\mathcal{F}_{-\infty}$ on *häntä σ-algebra* .

Teoreema 18.3. *(Doobin martingaalin takaperäinen konvergenssilause) Olkoon* $(X_t : t \in -\mathbb{N})$ *alimartingaali filtraatiossa* $(\mathcal{F}_t : t \in -\mathbb{N})$.

Tarkastellaan mitä tapahtuu kun $t \downarrow (-\infty)$ *ja informaatio pienenee.*

1. *P-melkein varmasti on olemassa raja-arvo*

$$X_{-\infty}(\omega) = \lim_{t\to-\infty} X_t(\omega) \in [-\infty, \infty)$$

2. *Kun*

$$\sup_{t\le 0} E(X_t^-) < +\infty$$

seuraa että $X_{-\infty}(\omega) \in L^1(P)$.

3. *Kun* $(X_t : t \in -\mathbb{N})$ *on martingaali, koska* $X_t = E_P(X_0|\mathcal{F}_t)\ \forall t \in -\mathbb{N}$ *se on on tasaisesti integroituva ja*

$$X_{-\infty}(\omega) = E(X_0|\mathcal{F}_{-\infty})(\omega)$$

eli martingaalin ominaisuus on voimassa lajennetussa aika-indeksi joukossa $\{-\infty\} \cup \mathbb{Z}$.

Tod. Olkoon $U_{(a,b)}([t,0])$ prosessin (X_t):n (a,b)-ylitysten määrä aikavälissä $[t,0]$, jossa $a < b \in \mathbb{R}$, $t \in -\mathbb{N}$.

Olkoon $C_t(\omega) \in \{0,1\}$ sama ennustettava pelistrategia kuten Doobin etuperäisessa martingaalikonvergenssilauseessa, ja

$$Y_u - Y_t = \sum_{r=t+1}^{u} C_r \Delta X_r \quad t \le u \le 0$$

on ylimartingaali aikaparemetrilla $u \in \{t, t+1, \dots, 0\}$. Kun $t < u = 0$

$$Y_0(\omega) - Y_t(\omega) \ge U_{(a,b)}([t,0],\omega) - (Y_0(\omega) - a)^-$$

$E(Y_0 - Y_t) \le 0$ koska (Y_t) on alimartingaali, josta seuraa

$$E_P(U_{[a,b]}([t,0])) \le \frac{E_P((X_0 - a)^-)}{(b-a)} \le \frac{(|a| + E_P(|X_0|)}{(b-a)}$$

ja kuten etuperäisessa martingaalikonvergenssilauseessa

$$X_{-\infty}(\omega) := \limsup_{t\to-\infty} X_t(\omega) = \liminf_{t\to-\infty} X_t(\omega) \quad P\text{-m.v.}$$

Kun X_t on martingaali, on tasaisesti integroituva ja siitä seuraa konvergenssi $L^1(P)$ mielessä.

Alimartingaalin tapauksessa, koska $X_t \le E(X_0|\mathcal{F}_t)$ kun $t < 0$, seuraa

$$X_t^+ \le E(X_0|\mathcal{F}_t)^+ \le E(X_0^+|\mathcal{F}_t)$$

ja Fatou lemmasta seuraa

$$\begin{aligned} &E(|X_{-\infty}|) \le \liminf_t E_P(X_t^+) + \liminf_t E_P(X_t^-) \\ &\le E_P(|X_0|) + \sup_t E_P(X_t^-) \end{aligned}$$

Olkoon $A \in \mathcal{F}_{-\infty} \subseteq \mathcal{F}_t \ \forall t \in -\mathbb{N}$. Koska $\big(X_t = E_P(X_0|\mathcal{F}_t) : t \in -\mathbb{N}\big)$ on tasaisesti integroituva martingaali, $L^1(P)$-konvergenssin karakterisaation nojalla voidaan ottaa raja-arvoa odotusarvon sisään kun tarkistamme ehdollisen odotusarvon määritelmää, eli

$$E_P(X_0 \mathbf{1}_A) = E_P(X_t \mathbf{1}_A) \to E_P(X_\infty \mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_{-\infty}$$

joka tarkoittaa $X_{-\infty} = E_P(X_t|\mathcal{F}_{-\infty})$.

Teoreema 18.4. *(Kolmogorovin $0-1$ laki) Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N})$ satunnaismuuttujen jono ja*

$$\mathcal{T}_{-t} := \sigma(X_u : u \geq t), \quad \mathcal{T}_{-\infty} := \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{-t} \tag{18.1}$$

$\mathcal{T}_{-\infty}$ kutustaan jonon häntä σ-algebraksi.

Kun $(X_t : t \in \mathbb{N})$ ovat P-riippumattomia, $\mathcal{T}_{-\infty}$ on P-triviaali, eli $\forall A \in \mathcal{T}$, $P(A) \in \{0,1\}$

Tod. Olkoon $A \in \mathcal{T}_{-\infty}$. Koska $A \in \mathcal{T}_{-t} \forall t$, seuraa $A \perp\!\!\!\perp (X_1, \dots, X_t) \forall n$, eli $A \perp\!\!\!\perp (X_t : t \in \mathbb{N})$.

Koska $A \in \mathcal{T}_{-\infty} \subseteq \sigma(X_t : t \in N)$, seuraa että A on P-riippumaton itsestään, eli

$$P(A) = P(A \cap A) = P(A)P(A)$$

josta seuraa $P(A) \in \{0,1\}$ □

Teoreema 18.5. *(Kolmogorovin vahva suurten lukujen laki)*

Olkoon $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia jossa $X_1 \in L^1(P)$, ja olkoon

$$S_t(\omega) = X_1(\omega) + \dots + X_t(\omega)$$

Silloin

$$\lim_{t \to \infty} t^{-1} S_t(\omega) = E_P(X_1) \quad \textit{P-melkein varmasti ja } L^1(P)\textit{:n mielessä.}$$

Tod.

Olkoon $(\mathcal{F}_{-t} : t \in \mathbb{N})$ filtraatio jossa kun $t \leq 0$

$$\mathcal{F}_{-t} = \sigma(S_t, S_{t+1}, \dots),$$

ja martingaali $(M_{-t} : t \in \mathbb{N})$ jossa

$$M_{-t} = E_P(X_1|\mathcal{F}_{-t})$$

Huomataan että σ-algebran $\mathcal{F}_{-t}$:n sisältämä informaatio vähenee kun $t \uparrow \infty$.

Symmetrisyyden nojalla satunnaisparit (S_t, X_r) ja (S_t, X_1) ovat samoin jakautuneita kun $1 \leq r \leq t$, ja P-riippumattomuusesta seuraa kun $t \geq 0$

$$\begin{aligned} &M_{-t} := E_P(X_1|\mathcal{F}_{-t}) = E_P(X_1|S_t, S_{t+1}, S_{t+2}, \dots) \\ &= E_P(X_1|S_t, X_{t+1}, X_{t+2} \dots) = E_P(X_1|\sigma(S_t)) = E_P(X_r|\sigma(S_t)) \quad \forall 1 \leq r \leq t \end{aligned}$$

eli

$$S_t = E_P(X_1 + \cdots + X_t|\sigma(S_t)) = \sum_{r=1}^{t} E_P(X_r|\sigma(S_t)) = tE_P(X_1|\sigma(S_-))$$

ja $M_{-t}(\omega) = S_t(\omega)/t$ kun $t \geq 0$. Doobin takaperäisestä martingaali-konvergenssi lausesta seuraa P-melkein varmasti ja $L^1(P)$ mielessä on olemassa rajaarvo

$$M_{-\infty}(\omega) = \lim_{t\to\infty} t^{-1} S_t(\omega) = M_{-\infty}(\omega) \qquad P \text{ m.v.}$$

jossa

$$M_{-\infty}(\omega) := \liminf_{t\to\infty} t^{-1} S_t(\omega) \quad \forall\omega$$

Huomataan myös että $\forall\omega \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} S_t(\omega) &= \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) + \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=(n+1)}^{t} X_i(\omega) \\ &= 0 + \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=(n+1)}^{t} X_i(\omega)\end{aligned}$$

on $\mathcal{T}_{-n} = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$-mitallinen $\forall n$, on mitallinen häntä σ-algebran $\mathcal{T}_{-\infty}$ suhteen (18.1), koska $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ ovat P-riippumattomia Kolmogorovin $0-1$ lemmasta seuraa että $M_{-\infty}(\omega)$ on P-triviaali:

$P(t \leq M_{-\infty}) \in \{0, 1\}$ $\forall t$ ja $P(M_{-\infty} < \infty) = 1$, siitä seuraa että on olemassa $c \in \mathbb{R}$ jolla $P(M_{-\infty} = c) = 1$.

Siis P-melkein varmasti ja $L^1(P)$ mielessä

$$\frac{1}{t} S_t(\omega) \to c = E_P(X_1|\mathcal{F}_{-\infty})(\omega)$$

Ottaamalla odotusarvoa seuraa

$$c = E_P(M_{-\infty}) = E_P\big(E_P(X_1|\mathcal{F}_{-\infty})\big) = E_P(X_1).$$

Huomautus Symmetriasta seuraasi että $t^{-1}S_t(\omega) = E_P(X_1|\sigma(S_t))(\omega)$, ja sen konvergenssi P-melkein varmasti ja $L^1(P)$ mielessä seurasi taperäisestä martingaali-konvergenssi lauseesta. Riippumattomuuden tarvittiin osoittamaan

$$E_P(X_1|\sigma(S_t))(\omega) = E_P(X_1|\sigma(S_t, S_{t+1}, S_{t+2} \dots))(\omega)$$

ja että raja-arvo on P-triviaali. Kun luovutaan rippumattomuudesta, raja-arvo on satunnainen. Siihen pohjautuu De Finettin lause. Bruno De Finetti (1906-1985) oli italialainen matematiikko, taloustieteilijä ja filosofi.

19 Vaihdettavuus ja De Finettin lause

Määritelmä 19.1. *Satunnaisjono $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ joka saa arvot todennäköisyysavaruudessa $(S, \mathcal{S})$ on äärettömästi vaihdettavissa (engl. infinitely exchangeable) kun $\forall n$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{N}$ ja indeksien $\{1, \dots, n\}$ permutaatio π, satunnaisvektorit $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ ja $(X_{t_{\pi(1)}}, \dots, X_{t_{\pi(n)}})$ ovat samoin jakautuneita P mitan suhteen.*

Huomataan että kun jono $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ saa arvot $\mathbb{R}$:ssa, kuuten riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujen tapauksessa

$$M_{-t}(\omega) = t^{-1}S_t(\omega) := E(X_1|\mathcal{T}_{-t}), \quad t \in \mathbb{N}$$

on martingaali jolla on martingaali jolla on raja-arvo P-melkein varmasti ja $L^1(P)$:mielessä kun $t \to \infty$

$$M_{-\infty}(\omega) = E(X_1|\mathcal{T}_{-\infty})(\omega)$$

Häntä σ-algebra $\mathcal{T}_{-\infty}$ ei tarvitse olla triviaali ja $M_{-\infty}(\omega)$ on aidosti satunnainen.

Määritelmä 19.2. *Satunnaismuuttujat $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ jotka saavat arvoja todennäköisyysavaruudessa $(S, \mathcal{S})$ ovat ehdollisesti riippumattomia ja samoin jakautuneita ehdolla σ-algebraa $\mathcal{G}$ kun $\forall n$, $t_1, \ldots, t_n$, $A_1 \ldots A_n \in \mathcal{S}$.*

$$P(X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n|\mathcal{G})(\omega) = \prod_{i=1}^{n} P(X_1 \in A_i|\mathcal{G})(\omega) \quad P \ m.v$$

Ottaamalla ehdollisen odotusarvon odotusarvoa, seuraa että ehdollisesti riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujat ovat äärettömästi vaihdettavissa.

Teoreema 19.1. *(De Finetti) Olkoon $(S, \mathcal{S})$ Borelin avaruus. Kun satunnaisjono $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N}) \subseteq S$ on äärettömästi vaihdettavissa P:n suhteen toinen implikaatio on myös voimassa, satunnaismuuttujat ovat ehdollisesti riippumattomia ja samoin jakautuneita ehdolla häntä-σ-algebraa $\mathcal{T}_{-\infty}$ joka tullaan määrittelemään.*

Proof Olkoon

$$\mu_t(dx;\omega) = t^{-1}\sum_{i=1}^{t} \mathbf{1}(X_i(\omega) \in dx)$$

satunnaismuuttujen $(X_1, \ldots, X_t)$ empiirinen mitta joka virittää σ-algebran $\sigma(\mu_t) = \sigma\{\mu_t(A) : A \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{F}$.

Huomataan että $\sigma(\mu_t) \subseteq \sigma(X_1, \ldots, X_t)$, ja kun $t > 1$ se on aidosti pienempi koska empiirinen mitta sisältää satunnaismuuttujen arvot mutta unohtaa niiden järjestyksen.

Määritellään vähenevä σ-algebroiden jono

$$\mathcal{T}_{-t} := \bigvee_{k\geq t} \sigma(\mu_k), \quad \mathcal{T}_{-\infty} = \bigcap_{t\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_{-t} \text{ , on häntä-}\sigma\text{-algebra .}$$

Olkoon $k \in \mathbb{N}$ ja $f(x_1, \ldots, x_k) : S^k \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja mitallinen funktio. Kun $t \geq k$ laskemme symmetrian avulla $E_P(f(X_1, \ldots, X_k)|\mathcal{T}_{-t})(\omega)$.

Olkoon $1 \leq k \leq t$ ja määritellään satunnaistodennäköisyysmitta

$$\mu_t^{\circ k} : \mathcal{S}^{\otimes k} \to [0, 1]$$

joka on säännöllinen versio satunnaisvektorin $(X_1, \ldots, X_k)$ ehdollisesta jakaumasta ehdolla $\sigma(\mu_t)$ (joka on olemassa koska $(S, \mathcal{S})$ on Borelin avaruus).

Symmetriasta seuraa

$$\begin{aligned}
&E_P(f(X_1,\dots,X_k)|\sigma(\mu_t))(\omega)\\
&=\mu_t^{\circ k}(f;\omega):=\int_{S^k} f(x)\mu_t^{\circ k}(dx;\omega)=\frac{1}{t!}\sum_{\pi} f(X_{\pi(1)}(\omega),\dots,X_{\pi(k)}(\omega))\\
&=\frac{(t-k)!}{t!}\sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le t \text{ eriläisiä}} f(X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_k})
\end{aligned}$$

jossa summa otetaan yli $\{1,\dots,t\}$ joukon permutaatioita π.

Huomataan että $\mu^{\circ k}(dx;\omega)$ on $\sigma(\mu_t)$-mitallinen, koska rippuu vain arvoista $\{X_1(\omega),\dots,X_t(\omega)\}$ eikä niiden järjesyksestä. Huomataan myös että $\mu_t^{\circ k}(dx)$ ei ole tulo mitta, koska summassa ei ole toistuvien indeksien termeja.

Huomataan myös että kun $k=1$

$$\mu_t^{\circ 1}(A)=\mu_t(A)=\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}\mathbf{1}(X_k\in A)$$

on otoksen $(X_1(\omega),\dots,X_t(\omega))$:n empiirinen mitta.

Kun $k\le t$ vaihdettavuuden nojalla kaikille $\{1,\dots,t\}$ joukon permutaatiolle π $(X_1,\dots,X_k,\mu_t)$ ja $(X_{\pi(1)},\dots,X_{\pi(k)},\mu_t)$ ovat samoin jakutuneita, josta seuraa

$$E_P(f(X_1,\dots,X_k|\sigma(\mu_t))(\omega)=E_P(f(X_{\pi(1)},\dots,X_{\pi(k)})|\sigma(\mu_t))(\omega)$$

Kun summataan permutaatioiden π:n yli ja jaetaan niiden määrällä saadaan

$$\mu_t^{\circ k}(f;\omega)=E_P(f(X_1,\dots,X_k)|\sigma(\mu_t))(\omega)$$

Osoitamme seuraavaksi

$$E_P(f(X_1,\dots,X_k)|\sigma(\mathcal{T}_{-t}))(\omega)=E_P(f(X_1,\dots,X_k)|\sigma(\mu_t))(\omega)$$

Huomaamme myös että

$$\mathcal{T}_{-t}=\sigma(\mu_t,\mu_{t+1},\mu_{t+2},\dots)=\sigma(\mu_t,X_{t+1},X_{t+2},\dots)$$

koska empiiriset mitat $\mu_t(dx;\omega)$ ja $\mu_{t+1}(dx;\omega)$ määrävät $X_{t+1}(\omega)$ yhtälössä

$$(\mu_{t+1}-\mu_t)(dx)=\frac{1}{t+1}\Big(\mathbf{1}(X_{t+1}\in dx)-\mu_t(dx)\Big)$$

Then from infinite exchangeability it follows that in law, for $m\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&(X_1,X_2,\dots,X_n,X_{n+1},X_{n+2},\dots X_{n+m})\\
\overset{\mathcal{L}}{=}\;&(X_{\pi(1)},X_{\pi(2)},\dots,X_{\pi(n)},X_{n+1},X_{n+2},\dots X_{n+m})
\end{aligned}$$

for any permutation π of $\{1,\dots,n\}$.

Esimerkki 19.1. *$(X_1,\dots,X_n)$ ja $(X_{n+1},X_{n+2},\dots)$ ovat ehdollisesti riippumattomia ehdolla $\sigma(\mu_n)$,*

R. *Huomataan ensin että satunnaismuuttuja* $W(\omega)$ *on* $\sigma(\mu_n)$ *mitaalinen jos ja vain jos* $W(\omega) = g(X_1, \dots, X_n)$ *jossa* g *on mitallinen ja symmetrinen, eli*

$$g(x_1, \dots, x_m) = g(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(m)}) \quad \forall \pi \textit{ permutaatiolle} .$$

Oletaamme myös että g *on rajoitettu.*

Olkoon myös $Y(\omega)$ *rajoitettu ja* $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$*-mitallinen, ja* $f(x_1, \dots, x_n)$ *rajoitettu* $\mathcal{S}^{\otimes n}$ *mitallinen, (ei välttämättä symmetrinen) Jonon äärettömästä vaihdettavuudesta seuraa* $\forall n \in \mathbb{N}$ *ja kaikille* $\{1, \dots, n\}$ *indeksien permutaatioille* π*, jonot*

$$(X_1, X_2, \dots X_n, X_{n+1}, X_{n+1}, \dots) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \dots X_{\pi(n)}, X_{n+1}, X_{n+1}, \dots)$$

ovat samoin jakautuneita P*-mitan suhteen*

$$\begin{aligned}
&E_P(Y\ W\ f(X_1, \dots, X_n))E_P(Y\ g(X_1, \dots, X_n)\ f(X_1, \dots, X_n)) \\
&= E_P(Y\ g(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})\ f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})) \\
&\quad \textit{(koska jono on vaihdettavissa)} \\
&= E_P(Y\ g(X_1, \dots, X_n)\ f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})) = E_P(Y\ W\ f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})) \\
&\quad \textit{(koska g on symmetrinen)} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\pi} E_P\Big(YWf(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})\Big) = E_P\Big(YW \frac{1}{n!} \sum_{\pi} f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})\Big) \\
&= E_P\big(Y\ W\ \mu_n^{\circ n}(f)\big)
\end{aligned}$$

Ehdollinen odotusarvon määritelmästä seuraa että

$$E_P\big(f(X_1, \dots, X_n)\big|\sigma(\mu_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)\big)(\omega) = \mu_n^{\circ n}(f; \omega) = E_P\big(f(X_1, \dots, X_n)\big|\sigma(\mu_n)\big)(\omega)$$

eli $(X_1, \dots, X_n)$ *ja* $(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ *ovat ehdollisesti* P*-rippumattomia ehdolla* $\sigma(\mu_n)$.

Toisin sanoen, $\mathcal{T}_{-n}$ *ei sisällä informatioota jono ensimmäisten* n*-arvojen järjesyksestä.*

Koska $M_{-t}^{(k)}(f) := \mu_t^{\circ k}(f)$ on martingaali filtratiossa $(\mathcal{T}_{-t} : t \in \mathbb{N})$, Doobin takaperäisestä martingaalikonvergenssi lauseesta seuraa että kun $t \to \infty$, on olemassa rajaarvo $M_{-\infty}^{(k)}(f)$ P-melkein varmasti ja $L^1(P)$:ssa.

Koska $(X_1, \dots, X_k)$ saa arvot Borel avaruudessa, ehdollisella todennäköisyydellä

$$P((X_1, \dots, X_k) \in A|\mathcal{T}_{-\infty})(\omega), \quad A \in \mathcal{S}^{\otimes k}$$

on säännöllinen versio,

eli $\mathcal{T}_{-\infty}$-mitallinen todennäköisyysydin $\mu_\infty^{\circ k}(dx; \omega)$ on $(S_1 \times \cdots \times S_k)$ jolla P-melkein varmasti kaikille rajoitetuille ja mitalliseille funktioille

$$\begin{aligned}
M_{-\infty}^{(k)}(f; \omega) &= E_P(f(X_1, \dots, X_k)|\sigma(\mathcal{T}_{-\infty}))(\omega) \\
&= \int_{S_1, \dots, S_k} f(x_1, \dots, x_k) \mu_\infty^{\circ k}(dx_1, \dots dx_k; \omega)
\end{aligned}$$

Kun $k = 1$ merkitään $\mu_\infty = \mu_\infty^{\circ 1}$, jossa

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} f(X_i(\omega)) = \int_S f(x) \mu_\infty(dx, \omega) \qquad P\text{-m.v.}$$

Esimerkki 19.2. *Koska $(S,\mathcal{S})$ on Borelin avaruus, on olemassa mitallinen inijektio $f:(S,\mathcal{S})\to([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$ jolla on mitallinen käänteiskuvaus f^{-1}. Tästä seuraa että kun $A\subseteq\mathcal{S}$, $A\in\mathcal{S}$ jos ja vain jos $f(A)$ on Borelin joukko. Koska*

$$\sigma\big\{(a,b]:0\le a<b\le 1,\ a,b\in\mathbb{Q}\big\}=\mathcal{B}([0,1])$$

seuraa että myös $\mathcal{S}$ on numeroituvasti generoitu, koska

$$\mathcal{S}=\sigma\big\{f^{-1}((a,b]\cap f(S)):0\le a<b\le 1,a,b\in\mathbb{Q}\big\}=\sigma\big\{A(\ell):\ell\in\mathbb{N}\big\}$$

A priori tiedetään että $\forall A\in\mathcal{S}$, $\exists\mathcal{N}_A\subseteq\Omega$ jolla $P(\mathcal{N}_A)=0$ ja

$$\mu_t(A;\omega)\to\mu_\infty(A;\omega)\quad\forall\omega\notin\mathcal{N}_A$$

Koska $P(\mathcal{N})=0$ jossa $\mathcal{N}=\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}}\mathcal{N}_{A(\ell)}$, seuraa että

$$\mu_t(A_\ell;\omega)\to\mu_\infty(A_\ell;\omega)\quad\forall\ell\in\mathbb{N}\quad\forall\omega\notin\mathcal{N}$$

ja koska $\sigma\{A_\ell:\ell\in\mathbb{N}\}=\mathcal{S}$ seuraa että $\forall A\in\mathcal{S}$

$$\mu_t(A;\omega)\to\mu_\infty(A;\omega)\quad\forall A\in\mathcal{S}\quad\forall\omega\notin\mathcal{N}\tag{19.1}$$

Samoin löytyy nolla mittainen joukko $\widetilde{\mathcal{N}}\subseteq\Omega$ jolla $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall\{A_i\}\subseteq\mathcal{S}$

$$\mu_t^{\circ k}(A_1\times\cdots\times A_k;\omega)\to\mu_\infty^{\circ k}(A_1\times\cdots\times A_k;\omega)\quad\forall\omega\notin\widetilde{\mathcal{N}}\tag{19.2}$$

P-melkein varmasti äärellisulotteisten jakaumien kokoelma

$$\Big\{\mu_\infty^{\circ k}(dx_1,\dots dx_k;\omega):k\in\mathbb{N}\Big\}$$

on yhteensopiva (tarkista!), ja Kolmogorovin laajennuslauseesta 2.1 seuraa että on olemssa satunnaismitta $\boldsymbol{\nu}_\infty(\,\cdot\,;\omega)$ jonojen $(x_k:k\in\mathbb{N})\subseteq S$ avaruudessa jolla $\forall k$, $A_1,\dots,A_k\in\mathcal{S}$

$$\begin{aligned}&P\big(X_1\in A_1,\dots X_k\in A_k|\mathcal{T}_{-\infty})(\omega)=\\&\mu_\infty^{\circ k}(A_1\times\cdots\times A_k;\omega)=\boldsymbol{\nu}_\infty\big(\big\{(x_l:l\in\mathbb{N}):x_1\in A_1,\dots,x_k\in A_k\big\};\omega\big)\end{aligned}$$

Näytän että P-melkein varmasti $\boldsymbol{\nu}_\infty(\cdot;\omega)$ on satunnaismitan kopioiden ääretön tulomitta, eli $\forall k$

$$P\big(X_1\in A_1,\dots X_k\in A_k|\mathcal{T}_{-\infty})(\omega)=\prod_{i=1}^k P(X_1\in A_i|\mathcal{T}_{-\infty})(\omega)$$

Olkoon $\mu_t^{\otimes k}$ k-kertainen tulomitta empiirisestä mitasta μ_t. Kun $f(x_1,\dots,x_k)$ rajoitettu ja Borel mitallinen,

$$\mu_t^{\otimes k}(f)=t^{-k}\sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le t}f(X_{i_1},\dots,X_{i_k})$$

joka sisältää myös termeja joissa on toistettuja indekseja. Silloin

$$
\begin{aligned}
&(\mu_t^{\circ k} - \mu_t^{\otimes k})(f) = \mu_t^{\circ k}(f) - \mu_t^{\otimes k}(f) = \\
&\mu_t^{\circ k}(f)\biggl(1 - \frac{t!}{t^k(t-k)!}\biggr) + t^{-k} \sum_{1 \le i_1,\dots i_k \le t:\ \exists l \ne m\ i_l = i_m} f(X_{i_1},\dots,X_{i_k})
\end{aligned}
$$

jossa ensimmäisessä osassa on termeja ilman toistettuja indekseja ja toisessa osassa kaikissa termeissä vähintään yksi satunnaismuuttuja on toistettu. Silloin $\forall k \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega$,

$$
\begin{aligned}
&|\mu_t^{\circ k}(f;\omega) - \mu_t^{\otimes k}(f;\omega)| \\
&\le \| f \|_\infty \left(1 - \prod_{l=0}^{k-1} \frac{(t-l)}{t} + t^{-k}\binom{k}{2} t^{k-1}\right) \to 0 \text{ kun } t \to \infty
\end{aligned}
$$

jossa $\| f \|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|$ ja arvio ei riipu ω:sta

Kaikille $A_1, A_2 \dots \in \mathcal{S}$, $\forall k$ P-melkein varmasti kun $t \to \infty$

$$
\mu_t^{\circ k}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) \to \mu_\infty^{\circ k}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k)
$$

ja kun $k = 1$

$$
\mu_t^{\circ 1}(A_i) \to \mu_\infty(A_i),
$$

kovergenssi seuraa myös tulomitoille

$$
\mu_t^{\otimes k}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = \prod_{i=1}^k \mu_t^{\circ 1}(A_i) \to \prod_{i=1}^k \mu_\infty(A_i) = \mu_\infty^{\otimes k}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k).
$$

Kolmio epäyhtälöstä

$$
\begin{aligned}
&|\mu_{-\infty}^{\circ k}(f) - \mu_{-\infty}^{\otimes k}(f)| \\
&\le |\mu_{-\infty}^{\circ k}(f) - \mu_t^{\circ k}(f)| + |\mu_t^{\circ k}(f) - \mu_t^{\otimes k}(f)| + |\mu_t^{\otimes k}(f) - \mu_\infty^{\otimes k}(f)| \to 0
\end{aligned}
$$

P-m.v. kun $t \to \infty$, ja

$$
\mu_\infty^{\circ k}(f;\omega) = \mu_\infty^{\otimes k}(f;\omega) \qquad P\text{-a.s}
$$

kaikille rajoitetuille mitallisille $f(x_1,\dots,x_k)$. Se tarkoittaa Kolmogorovin laajennus $\boldsymbol{\nu}_\infty$ on tulomitta jonojen avaruudessa $S^{\mathbb{N}}$. Rajoitetuille mitalliselle funktiolle $g_1,\dots,g_k : S \to \mathbb{R}$

$$
E_P(g_1(X_1)\dots g_k(X_k)|\mathcal{T}_{-\infty})(\omega) = \prod_{i=1}^k \biggl\{\int_S g_i(x)\mu_\infty(dx,\omega)\biggr\}
$$

Ottaamalla odotusarvoa seuraa

$$
\begin{aligned}
&E_P(g_1(X_1)\dots g_k(X_k)) \\
&= E_P\biggl(\int_S g_i(x)\mu_\infty(dx)\biggr) = \int_{\mathcal{M}(S)} \biggl\{\prod_{i=1}^k \int_S g_i(x)\mu(dx)\biggr\} Q(d\mu)
\end{aligned}
$$

jossa Q on satunnaismitan $\mu_\infty(dx;\omega)$ jakauman avaruudessa

$$\mathcal{M}(S) = \big\{ \text{ todennäköisyys mittoja } \nu : \mathcal{S} \to [0,1] \ \big\}$$

Toisin sanoen, permutaatio-symmetrinen (eli äärettömasti vaihdettavissa) satunnaismuuttujen jono joka saa arvot Borelin avaruudessa, on riippumattomien ja samoin jakautuneiden jonojen sekoitus $\Box$

Esimerkki 19.3. *De Finetti todisti ensin lauseensa yksinkertaisimmissa tapauksessa, binaarijonoille, jossa $S = \{0,1\}$. Silloin $\mathcal{M}(S) = [0,1]$.*

Olkoon $S_t(\omega) = (X_1(\omega) + \cdots + X_t(\omega))$.

Jos kolikkoheittojenjono on äärettömästi vaihdettavissa P-mitan suhteen, raja-arvo $\vartheta(\omega) := \lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}S_t(\omega) \in [0,1]$ on olemassa P-melkein varmasti ja $L^1(P)$:ssa .

Olkoon $Q(d\theta) = P(\{\omega : \vartheta(\omega) \in d\theta\})$. Kun ehdollistetaan σ-algebraan $\sigma(\vartheta)$, kolikonheitot ovat ehdollisesti riippumattomia ja Bernoulli jakautuneita, samalla satunnais-todennäköisyysparametrilla $\vartheta(\omega) \in [0,1]$. Raja-arvon todennäköisyysmitta $Q(d\theta)$ tulkitaan prioritodennäköisyydeksi parametrille ϑ. Silloin $\forall k$, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \{0,1\}$,

$$P\big(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k\big) = \int_0^1 \Big\{ \prod_{i=1}^k P(X_1 = x_i | \vartheta = \theta) \Big\} Q(d\theta)$$

$$\int_0^1 \theta^{S_k}(1-\theta)^{(k-S_k)} Q(d\theta)$$

$$Q(B) = P\big(\{\omega : \lim_{t\to\infty} t^{-1}S_t(\omega) \in B\}\big), \quad B \in \mathcal{B}([0,1])$$

De Finettin lause on avain Bayeslaiseen päättelyyn.

20 Radon-Nikodymin lause

Määritelmä 20.1. *Olkoon μ ja ν positiiivisia mittoja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega,\mathcal{F})$, ja $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali σ-algebra*

ν on absoluuttisesti jatkuva μ:n suhteen ali σ-algebrassa $\mathcal{G}$, kun

$$A \in \mathcal{G},\ \mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0$$

Silloin merkitään $\nu \overset{\mathcal{G}}{\ll} \mu$.

Kun $\mu \ll \nu$ ja $\nu \ll \mu$ mitat ovat eqvivalentteja, niillä on samat nollamittaiset joukot, ja merkitään $\mu \sim \nu$.

Lemma 20.1. *Olkoon $Q \ll P$ todennäköisyysmittoja avaruudessa $(\Omega,\mathcal{F})$.*

$\forall \varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ jolla

$$A \in \mathcal{F},\ P(A) < \delta \Longrightarrow Q(A) < \varepsilon$$

Tod. Muuten on olemassa $\varepsilon > 0$ ja jono $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ jolla $P(A_n) \le 2^{-n}$ ja $Q(A_n) \ge \varepsilon > 0$ Borel Cantelli lemmasta $P(\limsup A_n) = 0$. Käänteisestä Fatou lemmasta seuraa

$$Q(\limsup A_n) \ge \limsup Q(A_n) \ge \varepsilon > 0$$

joka on ristiriidassa oletuksen $Q \ll P$ kanssa $\Box$

Teoreema 20.1. *(Radon-Nikodym) Olkoon μ ja ν σ-äärellisia positiivisia mittoja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$. Kun $\nu \overset{\mathcal{F}}{\ll} \mu$, on olemassa $\mathcal{F}$-mitallinen kuvaus $Z : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, jolla pätee mitan vaihto kaava*

$$\nu(A) = \int_\Omega Z(\omega) \mathbf{1}_A(\omega) \mu(d\omega) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Tod Koska μ ja ν are σ-äärellisiä, on olemassa numeroituva mitallinen ositus $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ jolla $\mu(\Omega_n) < \infty$ and $\nu(\Omega_n) < \infty$ $\forall n$. Kun otamme $P_n(d\omega) = \mu(d\omega)/\mu(\Omega_n)$ ja $Q_n(d\omega) = \nu(d\omega)/\nu(\Omega_n)$ jokaiselle Ω_n, huomaamme että lause seuraa yleisesti kun se todistetaan todennäköisyysmitoille $Q \ll P$.

Oletamme ensin että σ-algebra $\mathcal{F}$ on numeroituvasti viritettävässä tai *separoituva* , eli $\mathcal{F} = \sigma(F_n : n \in N)$ jossa $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, esimerkiksi silloin $(\Omega, \mathcal{F})$ on Borelin avaruus.

Olkoon filtraatio $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$ jossa $\mathcal{F}_n = \sigma(F_1, \dots, F_n)$, ja $\mathcal{F} = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

Kaikille $n \in \mathbb{N}$, ottaamalla leikkauksia joukoista $F_1, \dots F_n$, löytyy Ω:n $\mathcal{F}_n$-mitallinen ositus $\{A_1^{(n)}, \dots, A_{m_n}^{(n)}\}$ jolla $\mathcal{F}_n = \sigma(A_k^{(n)} : k = 1, \dots, m_n)$.

Määritellään $\mathcal{F}_n$ mitallinen satunnaismuuttuja

$$Z_n(\omega) = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{Q(A_k^{(n)})}{P(A_k^{(n)})} \mathbf{1}(\omega \in A_k^{(n)})$$

jossa $0/0$ saa mielivaltainen arvo, esimerkiksi 0.

Koska $Q \ll P$, seuraa että $Q(A_k^{(n)}) = 0$ kun $P(A_k^{(n)}) = 0$, siksi $Z_n(\omega) \in [0, +\infty)$.

Seuraa määritelmästä että $Z_n(\omega)$ on $\mathcal{F}_n$-mitallinen, $Q(A_k^{(n)}) = E_P(Z_n \mathbf{1}_{A_k^{(n)}})$, $k \in \{1, \dots, m_n\}$, ja siksi $E_Q(X) = E_P(Z_n X)$ kun X on $\mathcal{F}_n$-mitallinen satunnaismuuttuja.

Huomataan myös että $Z_n(\omega)$ on P-integroituva (koska saa äärellisesti monta arvoa) $E_P(Z_n) = Q(\Omega) = 1$.

Näytämme että satunnaisjono $(Z_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ on $(P, \{\mathcal{F}_n\})$-martingaali.

Olkoon $A_k^n = \bigcup_{j=1}^m A_{\ell_j}^{n+1}$ joillekin m, $\ell_1, \dots, \ell_m$.

$$E_P(Z_n \mathbf{1}_{A_k^n}) = Q(A_k^n) = \sum_{j=1}^m Q(A_{\ell_j}^{n+1}) = \sum_{j=1}^m E_P\big(Z_{n+1} \mathbf{1}_{A_{\ell_j}^{n+1}}\big) = E_P(Z_{n+1} \mathbf{1}_{A_k^n})$$

josta seuraa

$$E_P(Z_n \mathbf{1}_A) = Q(A) = E_P(Z_{n+1} \mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_n$$

ja martingaali ominaisuus seuraa ehdollisen odotusarvon määritelmästä

$$E_P(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n)(\omega) = Z_n(\omega).$$

Määritellän kaikille $\omega \in \Omega$

$$Z_\infty(\omega) := \limsup_{n \to \infty} Z_n(\omega) \ .$$

Koska $(Z_n(\omega)) \geq 0$ Doobin etuperäinen martingaalikonvergenssi lauseesta seuraa että P melkein varmasti

$$Z_\infty(\omega) = \lim_{n\to\infty} Z_n(\omega)$$

jolla $Z_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja $E_P(Z_\infty) \leq E_P(Z_1) = 1$.

Osoitan että $Q(A_n) = E_P(Z_\infty \mathbf{1}_{A_n})$ $\forall n, A_n \in \mathcal{F}_n$, ja koska nämä virittävät $\mathcal{F}$ σ-algebran, seuraa $Q(A) = E_P(Z_\infty \mathbf{1}_A)$ $\forall A \in \mathcal{F}$.

Koska $Q(A_n) = E_P(Z_m A_n)$ kun $m \geq n$, yhtälö

$$E_P(Z_\infty A_n) = \lim_{m\to\infty} E_P(Z_m \mathbf{1}_{A_n}) = Q(A_n)$$

seuraa L^1 konvergenssin karakterisaatiosta kun osoitamme että P-martingaali (Z_n) on P-tasaisesti integroituva.

Koska $Q \ll P$, lemman20.1 nojalla kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ jolla kun $A \in \mathcal{F}$ ja $P(A) < \delta$ seuraa $Q(A) < \varepsilon$.

Chebychevin epäyhtälöstä

$$P(Z_n > K) < K^{-1} E_P(Z_n) = K^{-1} \quad \forall n$$

Kun valitaan $K > \delta^{-1}$, koska $\{\omega : Z_n(\omega) > K\} \in \mathcal{F}_n$, mitanvaihto kaavasta

$$\sup_n E_P(Z_n \mathbf{1}(Z_n > K)) = \sup_n Q(Z_n > K) < \varepsilon$$

joka tarkoittaa tasaista integroituvuutta:

$$\lim_{K\to\infty} \sup_n E_P(Z_n \mathbf{1}(Z_n > K)) = 0$$

Siis lause on todistettu silloin kun σ-algebra $\mathcal{F}$ on separoituva.

Yleisemmin joudumme käyttämään yleistettyjen jonojen konvergenssia.

Muistetaan määritelmä topologian kurssista:

Määritelmä 20.2. *Topologisessa avaruudessa $(E, \mathcal{T})$ verkko (engl. net) on yleistetty jono $(x_\alpha : \alpha \in \mathcal{I})$ jossa indeksi joukko $(I, \leq)$ on suunnattu, eli osittain järjestetty joukko jolla kaikille $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$ on olemassa $(\alpha \vee \beta) \in I$ jolla*

$$\alpha \vee \beta \geq \alpha,\ \alpha \vee \beta \geq \beta,\ \gamma \geq \alpha \text{ ja } \alpha \geq \beta \Longrightarrow \gamma \geq \alpha \vee \beta$$

$x_\alpha \to x \in E$ kun kaikille avoimille $U \ni x$, $\exists \bar{\alpha}$ jolla $x_\alpha \in U$ $\forall \alpha \geq \bar{\alpha}$.

$(\mathbb{G}, \subseteq)$ on suunnattu joukko, jossa

$$\mathbb{G} := \left\{ \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} : \mathcal{G} \text{ on separoituva ali-}\sigma\text{-algebra} \right\}$$

Kun $\mathcal{G}', \mathcal{G}'' \in \mathbb{G}$ ovat separoituvia, myös $\mathcal{G}' \vee \mathcal{G}'' := \sigma(\mathcal{G}', \mathcal{G}'')$ on separoituva ali-σ-algebra. $(\mathbb{G}, \subseteq)$ on verkko.

Kun $\mathcal{G}$ on separoituva tiedämme että on olemassa satunnaismuuttuja $0 \leq Z_{\mathcal{G}}(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ jolla mitan vaihto kaavassa on voimassa

$$Q(A) = E_P(Z_{\mathcal{G}} \mathbf{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Osoitamme että $(Z_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \in \mathbb{G})$ on Cauchy-verkko $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$:ssa, ja täydellisyydestä seuraa että on olemassa raja $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Osoitan että $\forall \varepsilon > 0$ on olemassa $\overline{\mathcal{G}} \in \mathbb{G}$ jolla kun $\mathcal{G}' \supseteq \overline{\mathcal{G}}$, $\mathcal{G}'' \supseteq \overline{\mathcal{G}}$, $\mathcal{G}', \mathcal{G}'' \in \mathbb{G}$, seuraa

$$E_P\big(|Z_{\mathcal{G}'} - Z_{\mathcal{G}''}|\big) < \varepsilon$$

Yhtäpitävästi, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{\mathcal{G}}$ separoituva σ-algebra jolla kun $\overline{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{G}'$ separoituva, seuraa

$$E_P\big(|Z_{\overline{\mathcal{G}}} - Z_{\mathcal{G}'}|\big) < \varepsilon$$

Jos $(Z_{\mathcal{G}})$ ei olisi Cauchy verkko löytyisi $\varepsilon > 0$ ja ei-vähenevä jono $(\mathcal{G}_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{G}$

$$E_P\big(|Z_{\mathcal{G}_n} - Z_{\mathcal{G}_{n+1}}|\big) \geq \varepsilon > 0$$

Olkoon $\mathcal{G}_\infty = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$, joka on myös separoituva.

Kuten todistuksen ensimmäisessä vaiheessa seuraa että

$$Z_{\mathcal{G}_n}(\omega) = E_P(Z_{\mathcal{G}_\infty}|\mathcal{G}_n)(\omega) \to Z_{\mathcal{G}_\infty}(\omega)$$

on tasaisesti integroituva martingaali joka suppenee P-melkein varmasti ja $L^1(P)$:n mielessä, joka on ristiriidassa (20) kanssa.

Täydellisessä metrisessa avaruudessa (E, d) jokainen Cauchy verkko $(x_\alpha : \alpha \in \mathcal{I})$ suppenee, eli on olemassa $x^* \in E$ jolla $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{\alpha}$ jolla $d(x^*, x_\alpha) \leq \varepsilon$ $\forall \alpha \geq \overline{\alpha}$.

Todistamme myös tätä väiteettä, joka seuraa numeroituvien Cauchyn jonojen suppenemisesta.

Olkoon $\overline{\alpha}_n, n \in \mathbb{N}$ jolla $d(x_{\overline{\alpha}_n}, x_\alpha) \leq n^{-1}$ $\forall \alpha \geq \overline{\alpha}_n$, ja valitaan $\alpha_n \geq \alpha_{n-1}$.

$\overline{x}_n := x_{\overline{\alpha}_n}$ on Cauchyn jono jolla on raja-arvo $x^* \in E$, joka on myös verkon (x_α) raja-arvo, koska kun n on tarpeeksi suuri jolla $d(x^*, x_{\overline{\alpha}_n}) < \varepsilon$ ja $n > (1/\varepsilon)$, seuraa $\forall \alpha \geq \overline{\alpha}_n$

$$d(x_\alpha, x^*) \leq d(x_\alpha, x_{\overline{\alpha}_n}) + d(x_{\overline{\alpha}_n}, x^*) < 2\varepsilon$$

Siksi yleistetyllä Cauchyn jonolla $(Z_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \in \mathbb{G})$ on raja-arvo $Z_\infty(\omega)$ $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$:n normissa.

Seuraavaksi osoitaamme että mitänvaihtokaava pätee.

Olkoon $A \in \mathcal{F}$ ja $\mathcal{G} \in \mathbb{G}$ jolla

$$E_P(|Z_\infty - Z_{\mathcal{G}'}|) < \varepsilon$$

kaikille $\mathcal{G}' \supseteq \mathcal{G}$, $\mathcal{G}' \in \mathbb{G}$.

Olkoon $\widetilde{\mathcal{G}} := \sigma(\mathcal{G} \vee F) \in \mathbb{G}$.

Koska $A \in \widetilde{\mathcal{G}}$

$$Q(A) = E_P(Z_{\widetilde{\mathcal{G}}} \mathbf{1}_A)$$

seuraa

$$\Big| E_P(Z_\infty \mathbf{1}_A) - Q(A) \Big| \leq E_P\Big(\big| Z_\infty - Z_{\widetilde{\mathcal{G}}} \big| \Big) < \varepsilon$$

jossa $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen pieni $\square$

21 Johdatus Cramerin suurten poikkeamien teoriaan

Lause 21.1. *(Heikko suurten lukujen laki) Olkoon $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^2(P)$ satunnaismuuttujen jono joilla $E(X_n) = 0$*

$$E_P(X_n^2) \le c < \infty \ \forall n \quad , \quad E_P(X_n X_m) = 0 \quad \text{kun } n \neq m$$

Merkitään $S_n(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$ ja otoksen keskiarvo $\overline{S}_n(\omega) = n^{-1} S_n(\omega)$.

Silloin $\overline{S}_n \to 0$ $L^2(P)$-mielessä ja stokastisesti kun $n \uparrow \infty$.

Samoin, kun $E_P(X_n) = \mu \ \forall n$, seuraa $\overline{S}_n \to \mu$ $L^2(P)$-mielessä ja stokastisesti.

Tod.

$$E_P(\overline{S}_n^2) = \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^n E_P(X_i^2) + \sum_{i=1}^n \sum_{1 \le j < i} E_P(X_i X_j)\right\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n E_P(X_i^2) \le \frac{c}{n}$$

Stokastinen konvergenssi seuraa L^2-konvergenssista $\Box$.

Huomautus 21.1. *Stokastisesta konvergenssista seuraa $P(\bar{S}_n \ge x) \to 0 \ \forall x > \mu$. Suurten poikkeamien teoria kertoo (tietyillä oletuksilla) että suppeneminen on eskponentiaalinen otoskoon n suhteen ja miten vauhti rippuu x:sta.*

Määritelmä 21.1. *Jono $\{a(n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ on subadditiivinen kun*

$$a(n+m) \le a(n) + a(m) \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Lemma 21.1. *Olkoon $\{a(n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ subadditiivinen. Oletamme että on olemassa N jolle $a(n) < \infty \quad \forall n \ge N$. Silloin*

$$\exists \lim_{n \to \infty} \frac{a(n)}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a(n)}{n}$$

Tod. Olkoon $n > m \ge N$, $n = (qm + r)$ jossa $1 \le r < m$, $q \in \mathbb{N}$. Subadditiivisuudesta,

$$\begin{aligned}
&a(n) \le a(qm) + a(r) \le q a(m) + \max_{1 \le r < m} a(r) \\
&\frac{a(n)}{n} \le \frac{q}{n} a(m) + \frac{1}{n} \max_{1 \le r < m} a(r) \\
&\Longrightarrow \limsup_n \frac{a(n)}{n} \le \frac{a(m)}{m} \quad \forall m \ge N \\
&\Longrightarrow \limsup_n \frac{a(n)}{n} \le \inf_{m \ge N} \frac{a(m)}{m} \le \liminf_m \frac{a(m)}{m}
\end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$\limsup_n \frac{a(n)}{n} = \liminf_n \frac{a(n)}{n} = \lim_n \frac{a(n)}{n}$$

Väite seuraa kun osoitamme

$$\inf_{k < N} \frac{a(k)}{k} \ge \inf_{m \ge N} \frac{a(m)}{m} \tag{21.1}$$

Tämä on selvää jos $a(m) = \infty \ \forall 0 < m < N$. Muuten $a(k) < \infty$ jollekin $0 < k < N$, ja subadditiivisuudesta seuraa

$$\frac{a(kN)}{kN} \leq \frac{a(k)}{k}$$

jossa $k < N \leq kN$, josta seuraa 21.1 □

Teoreema 21.1. *Olkoon satunnaismuuttujat $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ P-rippumattomia ja samoin jakautuneita. Silloin*

1. *funktio*

$$h(x) := -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(\overline{S}_n > x) = \Big(-\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log P(\overline{S}_n > x) \Big) \in [0, +\infty]$$

on hyvin määritelty

2. *$h(x)$ on ei-vähenevä ja konveksi.*

3. *$h(x) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad P(X_1 \geq x) > 0$*

$h(x)$ on jonon $(\overline{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vauhtifunktio

Tod.

1. Koska

$$P(\overline{S}_{n+m} > x) = P(S_{n+m} > (n+m)x) \geq P(\{S_n > nx\} \cap \{S_{n+m} - S_n > mx\}) =$$
$$P(S_n > nx)P(S_m > mx) = P(\overline{S}_n > x)P(\overline{S}_m > x)$$

jono $a(n) := -\log P(\overline{S}_n > x)$ on subadditiivinen ja väite seuraa lemmasta 21.1.

2. Tod.

$$P\big(\overline{S}_{2n} > \frac{x+y}{2}\big) = P\big(S_{2n} > n(x+y)\big) \geq P(\overline{S}_n > x)P(\overline{S}_n > y)$$
$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{2n} \log P(\overline{S}_{2n} > \frac{x+y}{2}) \leq -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}\log P(\overline{S}_n > x) + \frac{1}{n}\log P(\overline{S}_n > y)\Big)$$

kun $n \uparrow \infty$ seuraa

$$h\big(\frac{x+y}{2}\big) \leq \frac{1}{2}\Big(h(x) + h(y)\Big)$$

Osoitamme

$$h\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leq \alpha h(x) + (1-\alpha)h(y) \tag{21.2}$$

dyadisille luvuille $\alpha = k2^{-N},\ k = 0, \ldots, 2^N\ ,\ N \in \mathbb{N}$.

Väite on jo osoitettu kun $N = 1$ $\alpha = \alpha_1 = 0, \frac{1}{2}, 1$. Oletamme induktiohypoteesia:

että 21.2 on voimassa kun $\alpha = k2^{-n}$ $k = 0, \ldots, 2^n$, $1 \leq n < N$. Olkoon

$$\alpha_N := (2k+1)2^{-N} = \frac{\alpha_{N-1}^{-} + \alpha_{N-1}^{+}}{2}$$

jossa $\alpha^-_{N-1} := k2^{-(N-1)}$, $\alpha^+_{N-1} := (k+1)2^{-(N-1)}$.

$$
\begin{aligned}
&h(x\alpha_N + y(1-\alpha_N)) \\
&= h\Big(\frac{1}{2}\big(x\alpha^-_{N-1} + y(1-\alpha^-_{N-1})\big) + \frac{1}{2}\big(x\alpha^+_{N-1} + y(1-\alpha^+_{N-1})\big)\Big) \\
&\le \frac{1}{2}h\Big(x\alpha^-_{N-1} + y(1-\alpha^-_{N-1})\Big) + \frac{1}{2}h\Big(x\alpha^+_{N-1} + y(1-\alpha^+_{N-1})\Big) \le \\
&\text{(induktion hypoteesista)} \\
&\le \frac{1}{2}\Big(\alpha^-_{N-1}h(x) + (1-\alpha^-_{N-1})h(y)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\alpha^+_{N-1}h(x) + (1-\alpha^+_{N-1})h(y)\Big) \\
&= \alpha_N h(x) + (1-\alpha_N)h(y)
\end{aligned}
$$

eli 21.2 on voimassa myös kun $n = N$ ja induktiosta seuraa kaikille dyadisille luvuille α.

Olkoon $\alpha \in [0,1]$ ja $x \ge y$, joten $h(x) \ge h(y)$. $\forall N$ on olemassa dyadinen α_N jolle $0 \le (\alpha_N - \alpha) \le 2^{-N}$.

$$
\begin{aligned}
&\alpha h(x) + (1-\alpha)h(y) = \alpha_N h(x) + (1-\alpha_N)h(y) + (\alpha-\alpha_N)(h(x)-h(y)) \\
&\ge h(\alpha_N x + (1-\alpha_N)y) + (\alpha-\alpha_N)(h(x)-h(y)) \\
&\ge h(\alpha x + (1-\alpha)y) + (\alpha-\alpha_N)(h(x)-h(y))
\end{aligned}
$$

koska $\alpha_N(x-y)+y \ge \alpha(x-y)+y$, h on ei-vähenevä, ja $0 \le (\alpha_N-\alpha) < 2^{-N}$ on mielivaltainen pieni seuraa $\forall\alpha \in [0,1]$

$$\alpha h(x) + (1-\alpha)h(y) \ge h(\alpha x + (1-\alpha)y)$$

3. Selvästi $h(x) = -\infty$ kun $P(X_1 > x) = 0$. Jos $P(X_1 > x) := S(x) > 0$, seuraa $P(S_n > nx) \ge S(x)^n > 0$ ja siksi $h(x) > -\infty$ $\square$

Määritelmä 21.2. $\Lambda_X(t) := \log E_P\big(\exp(tX_1)\big) = \log m_X(t)$ *on momenttigeneroivafunktion logaritmi joka kutsutaan kumulanttigeneroiva funktioksi.*

Lemma 21.2. $\Lambda_X(t)$ *on konveksi.*

Tod. Kun $\alpha \in [0,1]$ eksponentit α^{-1} ja $(1-\alpha)^{-1}$ ovat konjugatteja, Hölderin epäyhtälöstä seuraa

$$
\begin{aligned}
&\Lambda(\alpha t + (1-\alpha)s) := \log E_P\big(\exp(\alpha tX)\exp((1-\alpha)sX)\big) \\
&\le \log\Big(E_P\big(\big(\exp(\alpha tX)^{1/\alpha}\big)^{\alpha}E_P\big(\big(\exp((1-\alpha)sX)^{1/(1-\alpha)}\big)^{1-\alpha}\Big) = \\
&\alpha\log E_P(\exp(tX)) + (1-\alpha)\log E_P(\exp(sX))
\end{aligned}
$$

Olkoon $P^{(t)}$ todennäköisyysmitan P:n Esscherin muunnos jonka suhteen satunnaismuuttujat X_i ovat edelleen riippumattomia ja samoin jakautuneita

$$
\begin{aligned}
&P^{(t)}(\{X_1 \in B_1\} \cap \{X_2 \in B_2\} \cap \dots \cap \{X_n \in B_n\}) = \\
&m_X(t)^{-n}E_P\big(\exp(tS_n)\mathbf{1}\{X_1 \in B_1\}\mathbf{1}\{X_2 \in B_2\}\dots\mathbf{1}\{X_n \in B_n\}\big) = \\
&\prod_{i=1}^{n} E_P\big(\exp(tX_1 - \Lambda_X(t))\mathbf{1}\{X_1 \in B_i\}\big)
\end{aligned}
$$

jossa $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$.

Muistetaan että

$$\frac{d}{dt}\Lambda_X(t) = m_X(t)^{-1}\frac{d}{dt}m_X(t) = m_X(t)^{-1}E_P(X_1\exp(tX_1)) = E_{P(t)}(X_1)$$

jossa integraalin ja derivaatan järjestyksen vaihto on sallittu olettamalla että $m_X(s) < \infty$ kun $s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ jollekin $\varepsilon > 0$

Olkoon $x \neq \mu = E_P(X_1)$. Osoitamme että on olemassa mitanvaihto-parametri $\widetilde{t} = \widetilde{t}(x)$ jolla $E_{P(\widetilde{t})}(X_1) = x$.

Määritelmä 21.3. *Määritellään Legendren muunnos*

$$\Lambda_X^*(x) = \sup_t (xt - \Lambda_X(t))$$

Koska kuvaus $t \mapsto (xt - \Lambda_X(t))$ on derivoituva ja konkaavi, huomataan että sen maksimi saavutetaan pisteessä $\widetilde{t} = \widetilde{t}(x)$ jos ja vain jos

$$\frac{d\Lambda_X}{dt}(\widetilde{t}) = E_{P(\widetilde{t})}(X_1) = x\ ,$$

ja $\Lambda_X^*(x) = x\widetilde{t} - \Lambda_X(\widetilde{t})$.

Legendren muunnos on konveksi: kun $\alpha \in [0,1]$,

$$\Lambda_X^*(\alpha x + (1-\alpha)y) = \sup_t \big\{\alpha(xt - \Lambda_X(t)) + (1-\alpha)(yt - \Lambda_X(t))\big\} \leq$$
$$\alpha \sup_t \big\{xt - \Lambda_X(t)\big\} + (1-\alpha)\sup_s \big\{yt - \Lambda_X(t)\big\} = \alpha\Lambda_X^*(x) + (1-\alpha)\Lambda_X^*(y)$$

Teoreema 21.2. *(Cramerin lause) Olkoon satunnaismuuttujat $(X_n : n \in \mathbb{N})$ riippumattomia ja samoin jakautuneita, jolla $m_X(t) = E_P(\exp(tX_1)) < \infty\ \forall t \in \mathbb{R}$ (josta seuraa $E_P^{(t)}(|X_1|^p) < \infty\ \forall p > 0, t \in \mathbb{R}$). Silloin, $\forall x \geq \mu = E_P(X_1)$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P(\overline{S}_n \geq x) = -h(x) = -\Lambda^*(x)$$

Tod. Chebychevin epäyhtälöstä, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$P(\overline{S}_n \geq x) \leq e^{-tx}E_P(\exp(t\overline{S}_n)) = \exp(-tx)m_X(t/n)^n = \exp(-tx + n\Lambda_X(t/n))$$
$$= \exp\big(-n\big(x\,t/n + \Lambda(t/n)\big)\big)$$

kun optiomoidaan t:n suhteen

$$P(\overline{S}_n \geq x) \leq \inf_{t\in\mathbb{R}} \exp\big(-n(tx - \Lambda(t))\big) \Longleftrightarrow \frac{1}{n}\log P(\overline{S}_n \geq x) \leq -\sup_{t\in\mathbb{R}}\{tx - \Lambda(t)\}$$
$$= -\Lambda^*(x) \quad \forall n,\ x \geq \mu$$

Olkoon $\widetilde{P} = P^{(\widetilde{t})}$ todennäköisyysmitan P:n Esscherin muunnos, parametrilla $\widetilde{t} = \widetilde{t}(a)$ jolla $E_{\widetilde{P}}(X_1) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Koska $\exp(tX_1(\omega)) > 0 \quad \forall t, \omega$, seuraa $P(A) = 0 \Longleftrightarrow \widetilde{P}(A) = 0\ \forall A \in \mathcal{F}$ ja

$$\frac{dP}{d\widetilde{P}}(\omega)\bigg|_{\sigma(X_1,\dots,X_n)} = \left(\frac{d\widetilde{P}}{dP}(\omega)\bigg|_{\sigma(X_1,\dots,X_n)}\right)^{-1} = \exp\big(-\widetilde{t}S_n(\omega) + n\Lambda_X(\widetilde{t})\big)$$

Huomataan että kumulanttigeneroiva funktio $\widetilde{P}$ mitan suhteen on

$$\widetilde{\Lambda}_X(s) := \log E_{\widetilde{P}}(\exp(sX_1)) = \log E_P(\exp((s+\widetilde{t}))) - \Lambda_X(\widetilde{t}) = \Lambda_X(\widetilde{t}+s) - \Lambda_X(\widetilde{t})$$

Mitan vaihto kaavalla

$$\begin{aligned} P(|\overline{S}_n - a| < \varepsilon) &= E_{\widetilde{P}}\big(\exp(-\widetilde{t}S_n(\omega) + n\Lambda_X(\widetilde{t}))\mathbf{1}(|\overline{S}_n - a| < \varepsilon)\big) \\ &\geq \exp(n(\Lambda_X(\widetilde{t}) - (a+\varepsilon)\widetilde{t})\widetilde{P}(|\overline{S}_n - a| < \varepsilon) \end{aligned}$$

Koska oletetusti $E_P(\exp(tX)) < \infty$ myös $\widetilde{t}(a)$:n ympärillä, tästä seuraa että $E_{\widetilde{P}}(|X|^p) < \infty \; \forall p > 0$ ja heikko suurten lukujen lain nojalla , $\forall \varepsilon > 0$

$$\widetilde{P}(|\overline{S}_n - a| < \varepsilon) \to 1 \quad n \to \infty$$

seuraa

$$\frac{1}{n} \log P(|\overline{S}_n - a| < \varepsilon) \geq \Lambda_X(\widetilde{t}) - (a+\varepsilon)\widetilde{t} \; + \; o(1/n)$$

Kun $a = x + \varepsilon$, seuraa , $\forall \varepsilon > 0$

$$\frac{1}{n} \log P(\overline{S}_n \geq x) \geq \frac{1}{n} \log P(x \leq \overline{S}_n \leq x + 2\varepsilon) \geq \Lambda_X(\widetilde{t}) - (x+2\varepsilon)\widetilde{t} \; + \; o(1/n)$$

Tästä seuraa $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(\overline{S}_n \geq x) \geq \Lambda_X(\widetilde{t}) - (x+2\varepsilon)\widetilde{t} \geq -\sup_t\{(x+2\varepsilon)t - \Lambda_X(t)\} \\ &= -\Lambda_X^*(x+2\varepsilon) \; , \end{aligned}$$

koska $\Lambda_X^*(t)$ on konveksi ja siksi jatkuva $\square$

Huomautus 21.2. *Pienella vaivalla voidaan luopua oletuksesta $m_X(t) < \infty$ $\forall t \in \mathbb{R}$, oletus $X_1 \in L^1(P)$ riittää (Lause 27.3 Kallenbergin kirjasta, Foundations of modern probability).*

Teoreema 21.3. *(Dini) Olkoon $f_n : K \to \mathbb{R}$ jono jatkuvia funktioita jossa K on kompakti topologinen avaruus, (esimerkkiksi $K = [-T, T]$).*

Kun $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, $\forall n$ on olemassa pistettäinen raja arvo $f_\infty(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, jolla $f_n(x) \uparrow f(x)$.

Jos raja-funktio $f : K \to \mathbb{R}$ on jatkuva, silloin konvergenssi on tasainen

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} (f(x) - f_n(x)) = 0$$

Tod. *Koska funktio $(f - f_n)$ on jatkuva,*

$$E_n = \{x : (f(x) - f_n(x)) < \varepsilon\}$$

on avoin joukko, ja koska $f_n(x) \uparrow f(x) \; \forall x \in K$, seuraa että $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = K$. Koska K on kompakti, on olemassa N jolla $\bigcup_{n\leq N} E_n = K$. Mutta tämä tarkoittaa että $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$ jolla $\forall n \geq N$ koska f_n jono on monotoninen

$$f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_N(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in K$$

Lemma 21.3. *Olkoon $f(t), g(t)$ jatkuvia funktioita kompaktissa K. Olkoon*

$$f^* = \sup_{t\in K} f(t), \quad g^* = \sup_{t\in K} g(t)$$

Silloin

$$|f^* - g^*| \leq \sup_{t\in K} |f(t) - g(t)| = \| f - g \|_\infty$$

Tod. harjoitustehtävä.

Seuraus 21.1. *Kun $X_1 \in L^1(P)$, Cramerin lause pätee, myös kun $E_P(\exp(tX)) = \infty$ jollekin $t \in \mathbb{R}$.*

Tod. *Olkoon $x > \mu = E_P(X_1)$. Cramerin lauseen yläraja*

$$\frac{1}{n} \log P(\overline{S}_n > x) \leq \exp(-\Lambda^*(x))$$

seuraa joka tapauksessa Chebychevin epäyhtälöstä.

Olkoon

$$X_n^{(M)}(\omega) = X_n(\omega) \wedge K \uparrow X_n(\omega) \text{ kun } M \uparrow \infty,$$
$$\overline{S}_n^{(M)} = \frac{1}{n}\big(X_1^{(M)} + \cdots + X_n^{(M)}\big)$$

Kun $x > \mu = E_P(X_1)$

$$\frac{1}{n} \log P(\overline{S}_n > x) \geq \frac{1}{n} \log P(\overline{S}_n^{(M)} > x) \to -(\Lambda^{(M)})^*(x)$$

Osoitamme että $(\Lambda^{(M)})^*(x) \downarrow \Lambda^*(x)$ kun $M \to \infty$.

Monotonisen konvergenssilauseesta seuraa että

$$\Lambda^{(M)}(t) = \log E_P(\exp(t(X_1 \wedge K))) \uparrow \Lambda(t) = \log E_P(\exp(t(X_1))) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

jossa $\Lambda^{(K)}(t) < +\infty \ \forall K, t$, ja Dinin lauseesta seuraa että suppeneminen on tasainen kompakteissa K joissa $\Lambda(t) < \infty$.

Konveksisuudesta seuraa että $\{t : \Lambda(t) < \infty\}$ on konveksi, eli on avoin väli.

Tästä seuraa että kuvausten jono $t \mapsto (xt - \Lambda^{(M)}(t))$ suppenee tasaisesti kohti kuvausta $t \mapsto (xt - \Lambda(t))$ kompakteissa K jossa $\Lambda(t) < \infty$.

Lemmasta 21.3 seuraa että kompakteissa K joissa $\Lambda(t) < \infty$, $\forall x$

$$\sup_{t\in K}(xt - \Lambda^{(M)}(t)) \downarrow \sup_{t\in K}(xt - \Lambda(t))$$

kun $M \to \infty$.

Koska kuvaus $t \mapsto (xt - \Lambda(t))$ on konkaavi, on olemassa kompakti K jossa $\Lambda(t) < \infty \ \forall t \in K$

$$\sup_{t\in K}(xt - \Lambda(t)) = \Lambda^*(x) = \sup_{t}(xt - \Lambda(t))$$

ja

$$\sup_{t\in K}(xt - \Lambda^{(M)}(t)) = (\Lambda^{(M)})^*(x) = \sup_{t}(xt - \Lambda^{(M)}(t))$$

kun M on tarpeeksi suuri, ja väite seuraa lemmasta 21.3 $\square$

22 Keskeinen raja-arvo lause , Steinin todistus (ilman karakteristisia funktioita)

Lemma 22.1. *(Osittaisintegroinnin kaava) Olkoon $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei väheneviä ja oikealta jatkuvia funktioita. Silloin kun $a < b$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*

$$\begin{aligned}
&\int_a^b G(x)F(dx) \\
&= \int_a^b G(x-)F(dx) + \sum_{y\in(a,b]} \Delta G(y)\Delta F(y) \\
&= F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(x-)G(dx)
\end{aligned}$$

jossa integraalit ovat Riemannin-Stieltjesin mielessä. Osittaisintegrointi kaava pätee myös kun $F(x) = F^+(x) - F^-(x)$, $G(x) = G^+(x) - G^-(x)$, jossa $F^\pm, G^\pm$ ovat ei väheneviä ja oikealta jatkuvia.

Tod. Huomaamme ensin että

$$\int_a^b G(x)F(dx) = \int_{(a,b]} G(x)F(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(a,b]}(x)G(x)F(dx),$$

ja kun $x \geq a$,

$$G(x) = G(a) + \int_a^\infty \mathbf{1}(y \leq x)G(dy).$$

Tästä seuraa

$$\int_a^b G(x)F(dx) = \int_a^b \left\{ G(a) + \int_a^\infty \mathbf{1}(y \leq x)G(dy) \right\} F(dx) =$$

$$G(a)\big(F(b) - F(a)\big) + \int_a^b \left(\int_a^b \mathbf{1}(y \leq x)G(dy) \right) F(dx)$$

Koska mitat $F(dx)$ ja $G(dy)$ ovat äärellisiä kompakteissa ja integrandi on ei-negatiivinen, Fubinin lause soveltuu:

$$= G(a)\big(F(b) - F(a)\big) + \int_a^b \left(\int_a^b \mathbf{1}(y \leq x)F(dx) \right) G(dy) =$$

$$G(a)\big(F(b) - F(a)\big) + \int_a^b \big(F(b) - F(y-)\big)G(dy) =$$

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(y-)G(dy).$$

Huomataan myös että voidaan kirjoittaa

$$\int_a^b G(x)F(dx) = \int_a^b G(x-)F(dx) + \sum_{y\in(a,b]} \Delta G(y)\Delta F(y)$$

koska ei-vähenevälla funktiolla on korkeintaan numeroituvan määrän hyppyä □

Lemma 22.2. *$X(\omega)$ satunnaismuuttuja jolla $P(X \in dx) = p(x)dx$ jossa p on derivoituva. Silloin kun $h(x)$ on derivoituva testifunktio,*

$$E_P\biggl(\frac{df}{dx}(X)h(X)\biggr) = -E_P\biggl(f(X)\biggl(h'(X) + h(X)\frac{d\log p}{dx}(X)\biggr)\biggr)$$

Tod. harjoitustehtävä.

Lemma 22.3. *(Gaussinen osittaisintegrointi kaava) Olkoon $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0,1)$, jolla on jakauma*

$$\gamma(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\biggl(-\frac{x^2}{2}\biggr)dx\ .$$

ja olkoon $f, h \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \gamma)$ jolla myös $f', h' \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \gamma)$. Silloin

$$E_P\bigl(f'(G)h(G)\bigr) = E_P\biggl(f(G)(h(G)G - h'(G))\biggr)$$

erityisesti, kun $h(x) = 1$ saadaan

$$E_P\bigl(f'(G)\bigr) = E_P\bigl(f(G)G\bigr) = Cov_P(f(G), G)$$

kun $h(x) = x$, $f \in C^2(\mathbb{R})$

$$E_P\bigl(f''(G)\bigr) = E_P\bigl(f'(G)G\bigr) = E_P\bigl(f(G)(G^2 - 1)\bigr) = Cov_P(f(G), G^2)$$

Kun $f(x) = x^m, h = 1$ seuraa

$$mE_P(G^{m-1}) = E_P(f'(G)) = E_P(f(G)G) = E_P(G^m G) = E_P(G^{m+1})$$

Tod. harjoitustehtävä.

Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujen jono, joilla $E_P(X_1) = 0$, $E_P(X_1^2) = 1$ ja $E_P(|X_1|^m) < \infty \forall m > 0$.

Merkitään $S_n(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$.

Osoitamme aluksi että, kun $f(x)$ on polynomi,

$$\lim_{n\to\infty} E_P\biggl(f\bigl(S_n/\sqrt{n}\bigr)\biggr) = E_P(f(G))$$

jossa satunnaismuuttuja $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0,1)$ on standardi gaussinen.

Oletamme induktio hypotheesin: kaikille $\ell = 1, \dots, m$

$$\exists\ L_\ell := \lim_{n\to\infty} E_P\biggl(\biggl(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\biggr)^\ell\biggr)\ .$$

Selvästi $L_1 = 0$ ja $L_2 = 1$.

Kun $l = (m+1)$, symmetrisyydestä ja Newtonin kaavasta $(a+b)^m = \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} a^\ell b^{m-\ell}$ seuraa

$$E_P\big(S_n^{m+1}\big) = E_P\Big((S_{n-1}+X_n)^m(X_1+\cdots+X_{n-1}+X_n)\Big) =$$
$$nE_P\Big((S_{n-1}(\omega)+X_n)^m X_n\Big)$$
$$= n\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}E_P\big(S_{n-1}^{m-j}X_n^{j+1}\big)$$
$$= n\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}E_P\big(S_{n-1}^{m-j}\big)E_P\big(X_n^{j+1}\big)$$
$$= nmE_P(S_{n-1}^{m-1}) + \sum_{j=2}^{m}\binom{m}{j}E_P\big(S_{n-1}^{m-j}\big)E_P\big(X_n^{j+1}\big)$$

koska $E_P(X_n)=0$ ja $E_P(X_n^2)=1$. Jakamalla kertoimella $n^{(m+1)/2}$ saadaan

$$E_P\bigg(\Big(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\Big)^{m+1}\bigg) =$$
$$mE_P\bigg(\Big(\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}\Big)^{m-1}\bigg) + \sum_{j=2}^{m} n^{(1-j)/2}\binom{m}{j}E_P\bigg(\Big(\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}\Big)^{m-j}\bigg)E_P\big(X_n^{j+1}\big)$$

Kun $n\to\infty$ induktio hypotheesistä seuraa

$$L_{m+1} := \lim_{n\to\infty} E_P\bigg(\Big(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\Big)^{m+1}\bigg) = mL_{m-1}$$

Koska $L_1 = 0$, seuraa induktiolla $L_{2m+1} = 0 \quad \forall m$, ja koska $L_2 = 1$ seuraa

$$L_{2m} = (2m-1)L_{2(m-1)} = (2m-1)(2m-3)L_{(2m-2)} = \cdots = \prod_{\ell=1}^{m}(2\ell-1) = \frac{(2m)!}{m!2^m}$$

Lemmasta 22.3 seuraa että satunnaismuuttujan $(S_n(\omega)/\sqrt{n})$ asympottiset momentit täsmävät $\mathcal{N}(0,1)$ jakauman momenttien kanssa, riippumatta satunnaismuttujan X_1:n jakaumasta.

Voidaan myös laskea formaalisesti raja-jakauman momentti generoiva funktion

$$\lim_{n\to\infty} E_P\bigg(\exp\Big(t\frac{S_n}{\sqrt{n}}\Big)\bigg) = \lim_{n\to\infty} E_P\bigg(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\Big(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\Big)^m\bigg) =$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\lim_{n\to\infty}E_P\bigg(\Big(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\Big)^m\bigg) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}L_m =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{2m}}{(2m)!}L_{2m} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\Big(\frac{t^2}{2}\Big)^m = \exp\Big(\frac{t^2}{2}\Big) = E_P\big(\exp(tG)\big)$$

eli formaalisesti $n^{-1/2}S_n(\omega)$ raja-jakauman momentti generoiva funktio on standardi gaussinen.

Lemma 22.4. *Olkoon* $\{X_k(\omega) : k \in \mathbb{N}\}$ *riippumattomien satunnaismuuttujen jono, jolla* $E_P(X_k) = 0$ *ja* $E_P(X_k^2) = \sigma_k^2 < \infty$

Merkitään

$$\Sigma_n = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}$$
$$\hat{S}_n(\omega) = \frac{1}{\Sigma_n}\big(X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)\big)$$
$$r_n = \max_{1 \le k \le n} \frac{\sigma_k}{\Sigma_n}$$
$$g_n(\varepsilon) = \frac{1}{\Sigma_n^2} \sum_{k=1}^{n} E_P\Big(X_k^2 \mathbf{1}\big(|X_k| > \varepsilon \Sigma_n\big)\Big), \quad \varepsilon > 0$$

ja $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0,1)$ *on standardi gaussinen satunnaismuuttuja.*

Olkoon $f(x) \in C^3(\mathbb{R})$ *jolla on rajoitetut derivaatat:*

$$\| f'' \|_\infty := \sup_x |f''(x)| < \infty, \quad \| f''' \|_\infty := \sup_x |f'''(x)| < \infty,$$

1. Silloin $\forall \varepsilon > 0$,

$$\Big| E_P\big(f(\hat{S}_n)\big) - E_P\big(f(G)\big) \Big| \le \left(\frac{\varepsilon}{6} + \frac{r_n}{2}\right) \| f''' \|_\infty + g_n(\varepsilon) \| f'' \|_\infty$$

2. Koska $r_n^2 \le \varepsilon^2 + g_n(\varepsilon)$*, kun* $\lim_{n\to\infty} g_n(\varepsilon) = 0 \ \forall \varepsilon > 0$*, seuraa*

$$\lim_{n\to\infty} E_P\big(f(\hat{S}_n)\big) = E_P\big(f(G)\big)$$

Tod. Olkoon $\{\xi_k : k \in \mathbb{N}\}$ riippumattomia gaussisia satunnaismuttujat jotka ovat myös riippumattomia $(X_k : k \in \mathbb{N})$ jonosta, ja $E_P(\xi_k) = 0$ ja $E_P(\xi_k^2) = E_P(X_k^2) = \sigma_2^k$. Merkitään

$$\hat{G}_n(\omega) = \frac{1}{\Sigma_n}\big(\xi_1(\omega) + \cdots + \xi_n(\omega)\big)$$

Huomataan että $\forall n$ $\hat{G}_n(\omega)$ on standardi gaussinen.

Kiinnitämme nyt n, ja merkitään

$$\hat{X}_k(\omega) = \frac{X_k(\omega)}{\Sigma_n}, \quad \hat{\xi}_k(\omega) = \frac{\xi_k(\omega)}{\Sigma_n},$$
$$\hat{U}_m(\omega) = \big(\hat{X}_1(\omega) + \cdots + \hat{X}_{m-1}(\omega) + \hat{\xi}_{m+1}(\omega) + \cdots + \hat{\xi}_n(\omega)\big) \quad m \le n$$

Koska $f(\hat{U}_k + \hat{X}_k) = f(\hat{U}_{k+1} + \hat{\xi}_{k+1})$, teleskoppisella summalla,

$$f(\hat{S}_n) - f(\hat{G}_n) = f(\hat{U}_n + \hat{X}_n) - f(\hat{U}_n + \hat{\xi}_n)$$
$$+ f(\hat{U}_{n-1} + \hat{X}_{n-1}) - f(\hat{U}_{n-1} + \hat{\xi}_{n-1}) + \cdots + f(\hat{U}_1 + \hat{X}_1) - f(\hat{U}_1 + \hat{\xi}_1)$$

Tästä seuraa

$$\Big| E_P\big(f(\hat{S}_n)\big) - E_P\big(f(G)\big) \Big| \le \sum_{k=1}^{m} \Big| E_P\Big(f(\hat{U}_k + \hat{X}_k)\Big) - E_P\Big(f(\hat{U}_k + \hat{\xi}_k)\Big) \Big|$$

Olkoon

$$R_k(x) := f(\hat{U}_k(\omega)+x) - f(\hat{U}_k(\omega)) - xf'(\hat{U}_k(\omega)) - \frac{x^2}{2} f''(\hat{U}_k(\omega))$$

toisen asteen Taylorin kehitelmän jäännöstermi, jossa

$$R_k(x) \le \min\Big(x^2 \parallel f'' \parallel_\infty, \; \frac{|x|^3}{6} \parallel f''' \parallel_\infty \Big)$$

Koska $\hat{X}_k \perp\!\!\!\perp \hat{U}_k$ ja $\hat{\xi}_k \perp\!\!\!\perp U_k$, $E_P(\hat{X}_k) = E_P(\hat{\xi}_k) = 0$, $E_P(\hat{X}_k^2) = E_P(\hat{\xi}_k^2) = (\sigma_k^2/\Sigma_n^2)$ seuraa

$$\bigg| E_P\Big(f(\hat{U}_k + \hat{X}_k) \Big) - E_P\Big(f(\hat{U}_k + \hat{\xi}_k) \Big) \bigg| \le E_P\Big(\big|R_k(\hat{X}_k)\big| \Big) + E_P\Big(\big|R_k(\hat{\xi}_k)\big| \Big)$$

jossa

$$\sum_{k=1}^n E_P\Big(\big|R_k(\hat{\xi}_k)\big| \Big) \le \frac{E_P(|G|^3)}{6} \parallel f''' \parallel_\infty \sum_{k=1}^n \Big(\frac{\sigma_k^3}{\Sigma_n^3} \Big) \le \frac{r_n}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \parallel f''' \parallel_\infty$$

jossa $G \sim \mathcal{N}(0,1)$ ja $E_P(|G|^3) = 2^{3/2}\pi^{-1/2}$, ja

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n E_P\Big(\big|R_k(\hat{X}_k)\big| \Big) \\
&\le \frac{\parallel f''' \parallel_\infty}{6} \sum_{k=1}^n E_P\Big(|\hat{X}_k|^3 \mathbf{1}(|\hat{X}_k| \le \varepsilon) \Big) + \parallel f'' \parallel_\infty \sum_{k=1}^n E_P\Big(\hat{X}_k^2 \mathbf{1}(|\hat{X}_k| > \varepsilon) \Big) \\
&\le \frac{\parallel f''' \parallel_\infty}{6} \sum_{k=1}^n E_P\Big(\varepsilon \hat{X}_k^2 \mathbf{1}(|\hat{X}_k| \le \varepsilon) \Big) + \parallel f'' \parallel_\infty \sum_{k=1}^n E_P\Big(\hat{X}_k^2 \mathbf{1}(|\hat{X}_k| > \varepsilon) \Big) \\
&\le \varepsilon \frac{\parallel f''' \parallel_\infty}{6} + \parallel f'' \parallel_\infty g_n(\varepsilon)
\end{aligned}$$

Väite seuraa kun summataan yhteen näitä approksimatioita □

Huomamme että kun satunnaismuuttujat $(X_k : k \in \mathbb{N})$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, joilla $E_P(X_1) = 0$ ja $E_P(X_1^2) = \sigma^2$, automaattisesti lemman 22.4 oletus on voimassa, koska

$$g_n(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma^2} E_P(X_1^2 \mathbf{1}(|X_1| > n\varepsilon\sigma^2) \to 0 \text{ kun } n \to \infty \, .$$

Seuraavaksi yleistämme lemman 22.4 siloitustekniikalla myös jatkuville funktioille joilla on korkeintaan kvadraattinen kasvu:

Teoreema 22.1. *(Lindebergin keskeinen raja-arvo lause).*
Lemman 22.4 asetuksissa, olkoon $f(x)$ jatkuva funktio jolle

$$|f(x)| \le c\,(1+x^2) \quad \forall x, \; \textit{jollekin } c > 0$$

1. *Jos $g_n(\varepsilon) \to 0$ kaikille $\varepsilon > 0$ seuraa*

$$E_P\Big(f(\hat{S}_n) \Big) \to E_P\big(f(G) \big)$$

jossa $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2. Sen lisäksi, kaikille $a < b$

$$P\Big(a < \hat{S}_n \leq b\Big) \to P\Big(a < G \leq b\Big)$$

Tod. Olkoon $Y(\omega) \in (-1, 1)$ satunnaismuuttuja jolla on sileä tiheysfunktio $\rho(y) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Muuttujan vaihto-kaavalla seuraa että satunnaismuuttujalla $(Y(\omega)/k)$ on tiheysfunktio $k\rho(yk)$ kun $k > 0$. Määritellään

$$\begin{aligned} f_k(x) &:= E_P\Big(f(x - Y/k)\mathbf{1}(|x - Y/k| \leq k)\Big) \\ &= \int_{-1/k}^{1/k} f(x-y)\mathbf{1}(|x-y| \leq k)k\rho(ky)dy = \int_{-k}^{k} f(y)k\rho(k(x-y))dy \end{aligned}$$

Seuraa että $f_k(x)$ on kompaktikantainen, koska $f_k(x) = 0$ kun $|x| > (k + k^{-1})$.

Koska $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ ja f on jatkuva, kuvaus

$$(x, y) \mapsto k^2\rho'((x-y)k)f(y)$$

on rajoitettu kompaktissa

$$C_k = \Big\{(x, y) : y \in [-k, k], x \in [y - k, y + k]\Big\}$$

siksi dominoiudun konevergenssin lauseesta seuraa että f_k on derivoituva ja

$$\frac{d}{dx} f_k(x) = k^2 \int_{-k}^{k} f(y)\rho'((x-y)k)dy$$

Samoin seuraa korkeimpien derivaattojen olemassaolo.

Kun $k \to \infty$ dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) := \lim_{k\to\infty} E_P\left(f\left(x - \frac{Y}{k}\right)\mathbf{1}\left(\left|x - \frac{Y}{k}\right| \leq k\right)\right) = E_P(f(x-0)) = f(x)$$

Osoitamme että $f_k(x) \to f(x)$ tasaisesti kompakteissa. Koska f on tasaisesti jatkuva kompakteissa, $\forall R > 0$, $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ jolla $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ kun $|x| \leq R$ ja $|x - y| < \delta$. Siksi kun $k \geq \delta^{-1}$, kaikille $|x| \leq R$

$$\begin{aligned} &|f(x) - f_k(x)| = \\ &= \Big|f(x) - E_P(f(x - Y/k)\mathbf{1}\big(|x - Y/k| \leq k\big)\Big| \\ &= \Big|E_P\big(f(x) - f(x - Y/k)\big)\Big| \qquad \forall x : |x| \leq R \text{ kiinteä ja } k \text{ tarpeeksi suuri} \\ &\leq E_P(|f(x) - f(x - Y/k)|) < \varepsilon \end{aligned}$$

Kolmion epäyhtälöstä, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &\Big|E_P\Big(f(\hat{S}_n) - f(G_n)\Big)\Big| \\ &\leq \Big|E_P\Big(f(\hat{S}_n) - f_k(\hat{S}_n)\Big)\Big| + \Big|E_P\Big(f_k(\hat{S}_n) - f_k(G_n)\Big)\Big| + \Big|E_P\Big(f_k(G_n) - f(G_n)\Big)\Big| \end{aligned}$$

Jokaiselle $k \in \mathbb{N}$, $f_k(x)$ on sileä ja kompaktikantainen, rajoitetuilla derivaatoilla, ja täyttää 22.4 ehtoja

Oletuksesta $\forall \varepsilon > 0$ $g_n(\varepsilon) \to 0$ kun $n \to \infty$, seuraa $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\left| E_P\Big(f_k(\hat{S}_n) - f_k(G_n) \Big) \right| \longrightarrow 0 \quad \text{kun } n \uparrow \infty$$

Tasaisesta konvergenssista seuraa $\forall R > 0, \varepsilon$ on olemassa $\delta > 0$ jolle

$$\big| f(\hat{S}_n) - f_k(\hat{S}_n) \big| \mathbf{1}\Big(|\hat{S}_n| \le R \Big) \le \varepsilon$$

kun $k \ge \delta^{-1}$. Siksi $\forall n, R$.

$$\limsup_{k\to\infty} \limsup_n E_P\Big(\big| f(\hat{S}_n) - f_k(\hat{S}_n) \big| \mathbf{1}\Big(|\hat{S}_n| \le R \Big) \Big) = 0$$

Samoin

$$\limsup_{k\to\infty} E_P\Big(\big| f(G) - f_k(G) \big| \mathbf{1}\Big(|\hat{G}| \le R \Big) \Big) = 0$$

Tästä seuraa

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \left| E_P\Big(f(\hat{S}_n) - f(G) \Big) \right| \le \\
&\limsup_{k\to\infty} \limsup_n E_P\Big(\big| f(\hat{S}_n) - f_k(\hat{S}_n) \big| \mathbf{1}\Big(|\hat{S}_n| > R \Big) \Big) \\
&+ \limsup_{k\to\infty} E_P\Big(\big| f(G) - f_k(G) \big| \mathbf{1}\Big(|G| > R \Big) \Big)
\end{aligned}$$

Nyt käytämme hypotheesia $|f(x)| \le c\,(1 + x^2)$. Kun $|x| \ge 2$ seuraa

$$\begin{aligned}
&|f_k(x)| \le E_P\big(|f(x - Y/k)| \big) \le c\,(1 + (|x| + 1)^2) \le 2c\,(1 + x^2) \text{ ja} \\
&|f_k(x) - f(x)| \le |f_k(x)| + |f(x)| \le 3c\,(1 + x^2)\ , \text{ siksi} \\
&\limsup_n \left| E_P\Big(f(\hat{S}_n) - f(G) \Big) \right| \\
&\le \limsup_n 3c\ E_P\Big((1 + \hat{S}_n^2) \mathbf{1}\Big(|\hat{S}_n| > R \Big) \Big) + c E_P\Big((1 + G^2) \mathbf{1}\Big(|G| > R \Big) \Big)
\end{aligned}$$

Koska $G \in L^2(P)$,

$$\lim_{R\to\infty} E_P\Big((1 + G^2) \mathbf{1}\Big(|G| > R \Big) \Big) = 0\ .$$

Seuraavaksi approksimoidaan indikaattori $\mathbf{1}\Big(|x| > R \Big)$ sileällä funktiolla.

Olkoon $\eta \in C^\infty : \mathbb{R} \to [0, 1]$, jolla

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } |x| \ge 1 \\ 0 & \text{kun } |x| \le 1/2 \\ \in (0,1) & 1/2 < |x| < 1 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
&\psi_R(x) := (1+x^2)\eta(x/R) \le (1+x^2) \quad \text{jolla} \\
&(1+x^2)\mathbf{1}(|x|>R) \le \psi_R(x) \le (1+x^2)\mathbf{1}(|x|>R/2)\ .
\end{aligned}
$$

Koska

$$
\frac{d^2}{dx^2}\psi_R(x) = R^{-2}\eta''(x/R)(1+x^2) + R^{-1}\eta'(x/R)2x + 2\eta(x/R)
$$

ja derivaatat $\eta^{(\ell)}(x/R) = 0$, $\ell \ge 1$, ovat kompaktikantaisia, seuraa $\sup_x |\psi_R''(x)| < \infty$, $\sup_x |\psi_R'''(x)| < \infty$.

Lemmasta 22.4 seuraa

$$
\Big| E_P\big(\psi_R(\hat{S}_n)\big) - E_P\big(\psi_R(G)\big)\Big| \longrightarrow 0
$$

kun $n \to \infty$, ja

$$
\begin{aligned}
&E_P\bigg((1+S_n^2)\mathbf{1}\Big(|\hat{S}_n|>R\Big)\bigg) \\
&\le E_P\big(\psi_R(\hat{S}_n)\big) \to E_P\big(\psi_R(G)\big) \le E_P\bigg((1+G^2)\mathbf{1}(|G|>R/2)\bigg) \to 0 \text{ kun } R\uparrow\infty.
\end{aligned}
$$

Lopuksi olkoon $a<b$. On olemassa jatkuvien funktioden jonoja $(\overline{\psi}_m)$, $(\underline{\psi}_m) \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ joilla

$$
0 \le \underline{\psi}_m(x) \uparrow \mathbf{1}_{(a,b]}(x), \quad 1 \ge \overline{\psi}_m(x) \downarrow \mathbf{1}_{(a,b]}(x)
$$

Väiteestä (1) ja monotonisesta konvergenssista seuraa

$$
\begin{aligned}
&\liminf_n P(a<\hat{S}_n\le b) \ge \liminf_n E_P(\overline{\psi}_m(S_n)) = E_P(\overline{\psi}_m(G)) \downarrow P(a<G\le b) \\
&\limsup_n P(a<\hat{S}_n\le b) \le \limsup_n E_P(\underline{\psi}_m(S_n)) = E_P(\underline{\psi}_m(G)) \uparrow P(a<G\le b)
\end{aligned}
$$

kun $m\to\infty$ $\square$

23 Jakaumien konvergenssi

Olkoon $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono todennäköisyysavaruuksia, ja $X_n : \Omega_n \to (S, \mathcal{B}(S))$ satunnaismuuttujen jono jossa (S,ρ) on metrinen avaruus, esimerkiksi $S=\mathbb{R}^d$, Olkoon $X(\omega)$ satunnaismuuttuja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Määritelmä 23.1. *Sanotaan että jono X_n suppenee heikosti tai jakauman mielessä kohti X:n ja merkitään $X \xrightarrow{d} X$, kun*

$$
\begin{aligned}
&\forall f \in C_b(S;\mathbb{R}) = \big\{ f: S\mapsto\mathbb{R},\ \textit{jatkuva ja rajoitettu}\ \big\}, \\
&E_{P_n}(f(X_n)) \to E_P(f(X)) \quad \textit{kun } n\to\infty
\end{aligned}
$$

Huomataan että heikko konvergenssin kasite koskee vain satunnaismuuttujen jakaumista, siksi soveltuu myös tapaukseen jossa satunnaismuuttujat eivät elä samalla todennäköisyysavaruusdella. Kun $\Omega_n = \Omega$ $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ ja $P_n = P$ $\forall n$, nähdään myös että heikko konvergenssi on kaikien heikompi konvergenssikäsite:

Lemma 23.1. *Kun $X_n \xrightarrow{P} X$ (stokastisesti) ja f on jatkuva seuraa että $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.*

Tod. Kaikille alijonolle (n_k) on olemassa alijonon alijono (n_{k_l}) jolla $X_{n_{k_l}}(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti. Koska f on jatkuva seuraa myös että samalla alijono alajonolla $f(X_{n_{k_l}})(\omega) \to f(X(\omega))$. Tästä seuraa että $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.

Lause 23.1. *Kun $X_n \xrightarrow{P} X$ (stokastisesti) seuraa että $X_n \xrightarrow{w} X$ (jakauman mielessä)*

Tod. Olkoon f jatkuva ja rajoitettu. Seuraa lemmasta että $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$. Koska f on rajoitettu jono $\{f(X_n) : n \in \mathbb{N}\}$ on tasaisesti integroituva ja siksi $f(X_n) \xrightarrow{L^1(P)} f(X)$, josta seuraa $E_P(f(X_n)) \to E_P(f(X))$.

Lause 23.2. *Olkoon $X_n : \Omega_n \to \mathbb{R}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttujat, $F_n(t) = P_n(X_n \le t)$, $F(t) = P(X \le t)$. Silloin*

$$X_n \xrightarrow{w} X \iff F_n(t) \to F(t) \quad \forall t : F(t-) = F(t)$$

Tod. $\Longrightarrow$ă Approksimoidaan indikaattorin $x \mapsto \mathbf{1}(x \le t)$ jatkuvalla funktiolla h_ε jossa $\varepsilon > 0$

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & x \ge t \\ 1 - \frac{t-x}{\varepsilon} & t < x < t + \varepsilon \\ 0 & t + \varepsilon < x \end{cases}$$

Huomataan että

$$\mathbf{1}(x \le t) \le h_\varepsilon(x) \le \mathbf{1}(x \le t + \varepsilon)$$

josta seuraa

$$\begin{aligned} & F_n(t) \le E_{P_n}(h_\varepsilon(X_n)) \to E_P(h_\varepsilon(X)) \le F(t + \varepsilon) \\ & \Longrightarrow \limsup_n F_n(t) \le F(t + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0, \\ & \Longrightarrow \limsup_n F_n(t) \le F(t+) = F(t) \end{aligned}$$

koska $t \mapsto F(t)$ on oikealta jatkuva.

Samoin valitsemalla $g_\varepsilon(x) = h_\varepsilon(x + \varepsilon)$, koska

$$\mathbf{1}(x \le t - \varepsilon) \le g_\varepsilon(x) \le \mathbf{1}(x < t)$$

seuraa

$$\begin{aligned} & F_n(t-) \ge E_{P_n}(g_\varepsilon(X_n)) \to E_P(g_\varepsilon(X)) \ge F(t - \varepsilon) \\ & \Longrightarrow \liminf_n F_n(t-) \ge F(t - \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ & \Longrightarrow \liminf_n F_n(t) \ge F(t-) \end{aligned}$$

Kun $F(t) = F(t-)$ tästä seuraa että $\lim F_n(t) = F(t)$.

Toinen implikaatio seuraa Skorokhodin esityksestä.

23.1 Skorokhodin esitys

Olkoon $t \mapsto F(t)$ ei-vähenevä, oikealta jatkuva, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Kanonisessa todenäköisyysavaruudessa $\Omega = [0,1]$, joka on varustettu Borelin σ-algebralla ja todennäköisyysmitalla P joka on Lebesguen mitta, voidaan rakentaa satunaaismuuttuja $X(\omega)$ jolla $P(\omega : X(\omega) \leq t) = F(t)$.

Määritelään kertymäfunktion F:n yleistetyt käänteisfunktiot

$$X^+(\omega) := \inf\{t : F(t) > \omega\} = \sup\{t : F(t) \leq \omega\}, \tag{23.1}$$

$$X^-(\omega) := \inf\{t : F(t) \geq \omega\} = \sup\{t : F(t) < \omega\} \tag{23.2}$$

- $X^+(\omega) \geq X^-(\omega)$ ovat ei väheneviä ω:n suhteen
- $\omega \mapsto X^+(\omega)$ on oikealta jatkuva ja $\omega \mapsto X^-(\omega)$ on vasemmalta jatkuva.
- Huomataan myös että $F(X^-(\omega)) = \omega$ ja $\omega \leq F(X^+(\omega))$, koska F on oikealta jatkuva.

Osoitamme että $P(\omega : X^-(\omega) \leq z) = P(\omega : X^+(\omega) \leq z) = F(z)$,
ja $P(X^- = X^+) = 1$. Koska

$$X^-(\omega) \leq z \Longleftrightarrow \omega = F(X^-(\omega)) \leq F(z) \ ,$$

ja P on Lebesguen mitta, seuraa $F(z) = P(\omega : \omega \leq F(z)) = P(\omega : X^-(\omega) \leq z)$.

Koska $X^+(\omega) \geq X^-(\omega) \geq X^+(\omega') \geq X^-(\omega')$ kun $\omega > \omega'$, seuraa että $X^+(\omega) \geq X^-(\omega) \geq X^+(\omega-) := \lim_{\omega' \uparrow \omega} X^+(\omega)$ ja joukko

$$\{\omega : X^-(\omega) < X^+(\omega)\}$$

on korkeintaan numeroituva, $P(X^- < X^+) = 0$ jossa P on Lebesguen mitta. Tästä seuraa $P(X^+ \leq z) = P(\{X^- \leq z\} \cap \{X^+ = X^-\}) = P(X^- \leq z) = F(z)$.

Lauseen 23.2 implikaation $\Longleftarrow$ todistus

Olkoon $z \in \mathbb{R}$ jolla $F(z-) = F(z)$, ja $F_n(z) \to F(z)$. Olkoon $X_n^+(\omega), X_n^-(\omega)$ kertymäfunkion F_n yleistetyt käänteisfunktiot kuten kaavoissa 23.1-2.

Koska $X^+(\omega) < z \Longleftrightarrow \omega < F(z)$, kun n on tarpeeksi suuri $\omega < F_n(z)$ ja tämä tapahtuu jos ja vain jos $X_n^+(\omega) < z$. Silloin, $\limsup_n X_n^+(\omega) \leq z$ kun z on F:n jatkuvuuspiste jolla $z > X^+(\omega)$, ja koska epäjatkuvuuspisteiden määrä on korkeintaan numeroituva, seuraa $\limsup_n X_n^+(\omega) \leq X^+(\omega)$

Jos $X^-(\omega) > z$ seuraa $\omega > F(z)$ ja kun n on tarpeeksi suuri $\omega > F_n(z)$ josta seuraa $X_n^-(\omega) \geq z$. Silloin $\liminf_n X_n^-(\omega) \geq X^-(\omega)$.

$$X^-(\omega) \leq \liminf X_n^-(\omega) \leq \liminf X_n^+(\omega) \leq \limsup X_n^+(\omega) \leq X^+(\omega)$$

Joukossa $\{\omega : X^-(\omega) = X^+(\omega)\}$ seuraa

$$\lim_n X_n^+(\omega) = \lim_n X_n^-(\omega) = X^+(\omega) = X^-(\omega)$$

Varoitus: Olkoon $X_n, n \in \mathbb{N}$ ja $X(\omega)$ satunnaismuuttujat jotka elävät samassa todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jolla $X_n \xrightarrow{d} X$.

Koska $P(X_n \leq t) = F_n(t) \to F(t) = P(X \leq t)$ $\forall t$ jolla $F(t) = F(t-)$ Skorokhodin esityksellä saadaan kanonisessa todennäköosyysavaruudessa $\widetilde{\Omega} = [0,1]$ varustettuna Borelin σ-algebralla ja Lebesgue mitalla $\widetilde{P}$, satunnaismuuttumjen jono $\widetilde{X}_n(\widetilde{\omega})$ ja satunnaismuuttujan $\widetilde{X}(\widetilde{\omega})$ jotka elävät kanonisessa todennäköosyysavaruudessa $\widetilde{\Omega} = [0,1]$ varustettuna Borelin σ-algebralla ja Lebesgue mitalla $\widetilde{P}$, joilla

$$\widetilde{P}(\widetilde{X}_n \in B) = P(X_n \in B) \text{ ja } \widetilde{P}(\widetilde{X} \in B) = P(X \in B),$$
$$\widetilde{X}_n(\widetilde{\omega}) \to \widetilde{X}_n(\widetilde{\omega}) \quad \widetilde{P} \text{ m.v}$$

Tämä ei kerro yhtään mitään alkuperäisestä jonon $X_n(\omega)$ P-melkein varma konvergenssista alkuperäisessä todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Skorokhodin esityksessä satunnaismuuttujen $(\widetilde{X}(\omega), \widetilde{X}_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ yhteinen jakauma sattaa olla aivan eri kun alkuperäisten satunnaismuuttujen $(X(\omega), X_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ yhteistä jakaumaa, vaikka yksi-ulotteiset marginaali-jakaumat täsmävät.

Siksi, vaikka $\widetilde{X}_n(\widetilde{\omega}) \to \widetilde{X}(\widetilde{\omega})$ $\widetilde{P}$-melkein varmasti kanonisessa avaruudessa $\widetilde{\Omega}$, siitä ei saa tehdä johtopäätöksiä alkuperäisen jonon $X_n(\omega)$ stokastisesta konvergenssista alkuperäisessä todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Esimerkki Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon $(G_i(\omega) : i \in \mathbb{N})$ riippumattomia ja samoin jakautuneita standardi gaussisia satunnaismuuttujia, jolla $E_P(G_1) = 0$, $E_P(G_1^2) = 1$.

Olkoon $\widehat{S}_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2^n}}(G_1(\omega) + \cdots + G_{2^n}(\omega))$

Koska $S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_1(\omega) + G_2(\omega))$ on standardi gaussinen (harjoitustehtävä) seuraa induktivisesti että myös $\widehat{S}_n$ on standardi gaussinen, $P(\widehat{S}_n \in B) = P(G_1 \in B)$, ja koska jakauma säilyy on selvää että $\widehat{S}_n \xrightarrow{d} G_1$ (jakauman mielessä).

Kuitenkin voidaan osoittaa että $\widehat{S}_n$ ei suppene stokastisesti.

Muuten voitaisiin kirjoittaa

$$\widehat{S}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{S}_n + \widehat{S}'_n)$$

jossa $\widehat{S}'_n = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}(G_{2^{n-1}+1} + \cdots + G_{2^n}) \perp\!\!\!\perp \widehat{S}_n$.

Koska jono $(\widehat{S}_n)$ olisi stokastisesti Cauchy,

$$P(|\widehat{S}_{n+1} - \widehat{S}_n| \geq \varepsilon) = P\big(|\widehat{S}'_n - (\sqrt{2}-1)\widehat{S}_n| \geq \sqrt{2}\varepsilon\big) = P\big(|G_1 - (\sqrt{2}-1)G_2| \geq \sqrt{2}\varepsilon\big)$$

ja koska $\forall \varepsilon > 0$ vasemman puolen termi suppenee kohti nollaan kun n kasvaa, tästä seuraa että $G_1(\omega) = (\sqrt{2}-1)G_2(\omega)$ P-melkein varmasti ! Oletuksen mukaan $G_2 \perp\!\!\!\perp \sigma(G_1)$ P-mitan suhteen, josta seuraa että G_1 on P-rippumaton itsestään ja siksi P-triviaali, ja koska $E_P(G_1) = 0$ seuraa että $P(G_1 = 0) = 1$. Tämä on ristiriidata koska $E_P(G_1^2) = 1$.

Stokastinen konvergenssi seuraa jakauman konvergenssista ainoastaan kun rajajakauma on degeneroitu:

Lause 23.3. *Jos $\forall n$ X_n on satunnaismuuttuja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ ja $X_n \xrightarrow{d} c$ (jakauman mielessä) jossa c on vakio, seuraa että $X_n \xrightarrow{P_n} c$ (stokastisesti), eli*

$$P_n(|X_n - c| > \varepsilon) \to 0 \quad \textit{kun } n \to \infty$$

Tod. Koska

$$P_n(X_n \le t) = F_n(t) \to F(t) = \mathbf{1}(c \le t) \text{ kun } t \ne c.$$

seuraa $\forall \varepsilon > 0$

$$P_n(|X_n - c| \le \varepsilon) = P_n(X_n \le c + \varepsilon) - P_n(X_n \le c - \varepsilon) \to F(c+\varepsilon) - F(c-\varepsilon) = 1 - 0$$

Määritelmä 23.2. *Satunnaismuuttujen jono $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ on tiukka (engl. tight) kun*

$$\lim_{K\to\infty} \sup_n P_n(|X_n| > K) = 0$$

Lause 23.4. *(Hellyn valinta lause)*

- *Olkoon $(F_n : n \in \mathbb{N})$ kertymäjkaumien jono. On olemassa alijono F_{n_k} ja ei-vähenevä oikealta jatkuva $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ jolla $F_{n_k}(t) \to F(t)$ kaikissa t jossa $F(t) = F(t-)$.*
- *Ilman lisääoletuksia, rajafunktio $F(t)$ ei ole välttämättä kertymäfunktio, ei seura $F(+\infty) = \lim_{t\to\infty} F(t) = 1$ ja $F(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$*

  Jos jono $(F_n : n \in \mathbb{N})$ on tiukka, kaikki rajafunktiot F ovat kerymäfunktioita.

Tod.
Olkoon $\mathbb{Q} = \{\mathbb{Q}_n : n \in \mathbb{N}\}$ rationaali lukujen numerointi.
Koska $F_n(q_1) \in [0,1]$ joka on kompakti, on olemassa alijono $n(1,k)$ ja rajapiste $G(q_1)$ jolla $F_{n(1,k)}(q_1) \to G(q_1)$.
Koska $F_{n(1,k)}(q_1) \in [0,1]$ on olemassa alijonon alijono $n(2,k)$ ja rajapiste $G(q_2)$ jolla $F_{n(2,k)}(q_1) \to G(q_1)$ ja $F_{n(2,k)}(q_2) \to G(q_2)$ kun $k \to \infty$.
Induktiivisesti, kaikille i on olemassa alijono $\{n(i,k) : k \in \mathbb{N}\}$ ja rajaarvot joilla $\forall j = 1, \dots, i.$ $F_{n(i,k)}(q_j) \to G(q_j)$ kun $k \to \infty$.
Olkoon $n_k = n(k,k)$ diagonaali jono. Seuraa että $\forall q \in \mathbb{Q}$, $F_{n_k}(q) \to G(q)$ kun $k \to \infty$. Koska kertymäfunktiot F_n ovat ei väheneviä, myös kuvaus $q \mapsto G(q)$ on ei-vähenevä.
Olkoon $\forall t \in \mathbb{R}$

$$F(t) := \inf\{G(q) : q \in \mathbb{Q} \text{ ja } q > t\}$$

Kun t kasvaa inf pienemmästä joukosta ei-vähene, $F(t)$ on ei-vähenevä. $F(t)$ on oikealta jatkuva: kun $\varepsilon > 0$, $\exists q > t$ jolla $\forall t \le t' < q$,

$$F(t') - \varepsilon \le G(q) - \varepsilon \le F(t) \le F(t') \le G(q)$$

Osoitamme että jos $F(t) = F(t-)$ seuraa $F_n(t) \to F(t)$.
$\forall \varepsilon > 0$ On olemassa $s < t$ jolla $F(s) < F(t) < F(s) + \varepsilon$. Olkoon $r, q \in \mathbb{Q}$ jolla $s < r < t < q$ ja $G(q) < F(t) + \varepsilon$. Koska

$$F_n(r) \le F_n(t) \le F_n(q)$$

väite seuraa arviosta

$$F(t) - \varepsilon < F(s) \le G(r) \le \liminf_n F_n(t) \le \limsup F_n(t) \le G(q) < F(t) + \varepsilon$$

jossa ε on mielivaltainen.

Jos $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ on tiukka, määritelmästä seuraa että

$$\lim_{K\to\infty} \inf_{n\in\mathbb{N}} F_n(K) = 1, \qquad \lim_{K\to-\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} F_n(K) = 0$$

ja koska kun $K \in \mathbb{Q}$

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} F_n(K) \le \lim_{n\in\mathbb{N}} F_n(K) = G(q)$$

tästä seuraa että $\lim_{K\to\infty} G(K) = \lim_{K\to\infty} F(q) = 1$. Samoin$\lim_{K\to-\infty} G(K) = \lim_{K\to-\infty} F(q) = 0$.

24 Konvoluutiot ja karakteristiset funktiot

24.1 Lyhyesti kompleksi-analyysista

Olkoon satunnaisvektori $(\xi(\omega), \eta(\omega)) \in \mathbb{R}^2$. $\zeta(\omega) = \xi(\omega) + i\eta(\omega) \in \mathbb{C}$ on kompleksiarvoinen satunnaismuuttuja jossa $i = \sqrt{-1}$ on imaginaarinen yksikkö jolla $(i)^2 = -1$.

Muistetaan myös että kun $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\overline{z} := x - iy$ ja $|\zeta|^2 = \zeta\overline{\zeta} = \xi^2 + \eta^2$.

Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jossa kun $z = (x + iy)$ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ jossa $x, y \in \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

Sanotaan että $f(z)$ on analyyttinen pisteessä z jos ja vain jos on olemassa derivaatta

$$f'(z) = \lim_{w\to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

Sijoittamalla $w = z + \varepsilon$, $w = z + i\varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \to 0$,

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

josta seuraavat Cauchy Riemannin ehdot:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

Kun $f(z)$ on analyyttinen forall $z \in \Omega$ seuraa

$$\oint f(w)dw = 0, \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi}\oint \frac{f(w)}{w - z}dw \quad z \in \Omega \setminus \partial\Omega \text{ (Cauchyn kaava)}$$

jossa integroidaan suljetun $\partial\Omega$ käyrän yli.

Määritelmä 24.1. *Olkoon $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_d(\omega)) \in \mathbb{R}^d$ satunnaisvektori todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

Sen karakteristinen funktio $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ on

$$\varphi_X(t) = E_P\Big(\exp\big(\sqrt{-1}(t \cdot X)\big)\Big) = E_P\Big(\exp\big(\sqrt{-1}\sum_{k=1}^d t_k X_k\big)\Big)$$

Tässä $\exp(iX(\omega)\cdot t) = \cos(X(\omega)\cdot t) + i\sin(X(\omega)\cdot t)$. *Koska* $X(\omega)$ *on reaali arvoinen, seuraa että* $|\exp(it\cdot X(\omega))| \leq 1$, *ja siksi karakteristinen funktio on olemassa ja* $|\varphi_X(t)| \leq 1$.

Muita ominiaisuuksia:

- $\varphi_X(0) = 1$
- $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$
- $\varphi_{a+bX}(t) := E_P(\exp(i(a+bX)) = e^{ia}\varphi_X(tb)$, kun $a, b \in \mathbb{R}$
- Kuvaus $t \mapsto \varphi_X(t)$ on jatkuva (dominidun konvergenssin lauseesta),

Lause 24.1. *Olkoon* $X(\omega), Y(\omega)$ *P-rippumattomia. Silloin satunnaisvektorin* (X, Y) *karakteristinen funktio faktorisoituu*

$$\varphi_{X,Y}(s,t) := E_P(\exp(i(sX+tY))) = \varphi_X(s)\varphi_Y(t) := E_P(\exp(isX))E_P(\exp(itY))$$

Erityisesti

$$\varphi_{X+Y}(t) = E_P(\exp(it(X+Y))) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

Osoitamme pian että tämä on myös riittävä ehto.

Esimerkki 24.1. *Olkoon* $G(\omega)$ *standardi gaussinen jolla* $E(G) = 0$ $E(G^2) = 1$. *silloin*

$$E_P(\exp(itG)) = \exp(-\frac{1}{2}t^2)$$

Koska kuvaus $z \mapsto \exp(-\frac{1}{2}z^2)$ *on analyttinen, Cuachyn lauseesta seuraa*

$$\oint_\Gamma \exp(-\frac{1}{2}z^2)dz$$

kun integroidaan suljetun polun yli. Valitaan suljettu polku joka kulkee suoraana linjana pisteiden $(R-i\theta, R, -R, -R-i\theta)$ *välissä kellon vastaisesti, jossa* $R > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Siksi

$$\begin{aligned}0 = &\int_{-\theta}^{0} \exp(-\frac{1}{2}(R-i\psi)^2)d\psi + \int_{R}^{-R} \exp(-\frac{1}{2}r^2)dr \\ &+ \int_{0}^{-\theta} \exp(-\frac{1}{2}(-R-i\psi)^2)d\psi + \int_{-R}^{R} \exp(-\frac{1}{2}(r-i\theta)^2)dr = \\ &\exp(-\frac{1}{2}R^2)\int_{-\theta}^{0}(\exp(iR\psi) - \exp(-iR\psi))\exp(\frac{1}{2}\psi^2)d\psi \\ &+ \int_{-R}^{R} \exp(ir\theta + \frac{1}{2}\theta^2)\exp(-\frac{1}{2}r^2)dr - \int_{R}^{-R} \exp(-\frac{1}{2}r^2)dr\end{aligned}$$

Kun $R \to \infty$, *ensimmäinen integraali suppenee kohti nollaan, ja seuraa*

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}r^2)dr = \exp(-\frac{1}{2}\theta^2)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ir\theta)\exp(-\frac{1}{2}r^2)dr$$

Karakteristinen funktio määrää satunnaismuuttujan jakauman:

Teoreema 24.1. *(Lévy)*

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{t\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\exp(-iat)-\exp(-ibt)}{it}\varphi_X(t)dt=\frac{1}{2}\{F(b)+F(b-)\}-\frac{1}{2}\{F(a)+F(a-)\}$$

Kun $\int_{\mathbb{R}}|\varphi_X(t)|dt<\infty$*, yllä oleva integraali suppenee absoluuttisesti ja satunnaismuuuttujan jakaumalla on tiheysfunktio*

$$f_X(x)=\int_{\mathbb{R}}\exp(-itx)\varphi_X(t)dt$$

Tod.

$$\int_{-T}^{T}\int_{R}\frac{\exp(-iat)-\exp(-ibt)}{it}\exp(itx)P_X(dx)dt=$$
$$\int_{R}\int_{-T}^{T}\frac{\exp(it(x-a))-\exp(it(x-b))}{it}dtP_X(dx),$$

jossa Fubinin lause soveltuu koska

$$\int_{R}\int_{-T}^{T}\left|\frac{\exp(it(x-a))-\exp(it(x-b))}{it}\right|dtP_X(dx)\le 2T(b-a)$$

koska $|\exp(i\theta)-\exp(i\psi)|\le|\theta-\psi|$ kun $\theta,\psi\in\mathbb{R}$.

$$\int_{-T}^{T}\frac{\exp(it(x-a))-\exp(it(x-b))}{it}dt=2\int_{0}^{T}\frac{\sin(t(x-a))-\sin(t(x-b))}{t}dt$$

koska $t\to\sin(t)$ on ei-parillinen ja $t\to\cos(t)$ on parillinen, ja integroidaan $[-T,T]$ välissä,

$$=2\{U(T(x-a))-U(T(x-b))\}$$

jossa $U(t)=\int_0^t\frac{\sin(x)}{x}dx$.

Huomataan että kun $x\in(k2\pi,(k+1)2\pi]$, $\varepsilon\in(0,1)$

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\ge\frac{1}{(k+1)2\pi}\varepsilon\mathbf{1}(|\sin(x)|>\varepsilon)$$

ja siksi

$$\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|dx\ge\frac{2\varepsilon}{\pi}(\pi/2-\arcsin(\varepsilon))\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty.$$

Voidaan kuitenkin määritellä integraali

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx:=\lim_{T\to\infty}\int_0^{T}\frac{\sin(x)}{x}dx$$

joka ei suppene absoluuttisesti, ja on laskettavissa Cauchyn kaavalla.

Olkoon Γ on suljettu käyrä joka koostuu paloista $\Gamma_1 := \{z = x + i0 : x \in [-R, -\varepsilon]\}$, $\Gamma_2 = \{z = \varepsilon(\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)), \theta \in [0, \pi]\}$ $\Gamma_3 := \{z = x + i0 : x \in [\varepsilon, R]\}$, $\Gamma_4 := \{z = R(\cos(\theta) + i\sin(\theta)), \theta \in [0, \pi]\}$ jossa $0 < \varepsilon < R$. Koska $f(z)/z$ on analyyttinen kun $z \neq 0$, erityisesti Γ käyrän rajoittaman alueen sisällä,

$$\oint_\Gamma \frac{\exp(iz)}{z} dz = 0$$

Seuraa

$$\int_{\Gamma_4} \frac{\exp(iz)}{z} dz = \int_0^\pi \frac{\exp(iR(\cos(\theta) + i\sin(\theta)))}{Re^{i\theta}} \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta =$$
$$\int_0^\pi \frac{\exp(iR\cos(\theta) - R\sin(\theta))}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta$$
$$= i\int_0^\pi \exp(iR\cos(\theta))\exp(-R\sin(\theta))d\theta$$

ja kun $R \to +\infty$

$$\left|\int_0^\pi \exp(iR\cos(\theta))\exp(-R\sin(\theta))d\theta\right| \leq \int_0^\pi \exp(-R\sin(\theta))d\theta \to 0$$

jossa $\sin(\theta) > 0$ kun $\theta \in (0, \pi)$, ja käytämme dominoidun konvergenssin lausetta.

Samoin

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Gamma_2} \frac{\exp(iz)}{z} dz = -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} i \int_0^\pi \exp(i\varepsilon\cos(\theta))\exp(-\varepsilon\sin(\theta))d\theta = i\int_0^\pi d\theta = -i\pi$$

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} \frac{\exp(iz)}{z} dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\cos(r) + i\sin(r)}{r} dr + \int_\varepsilon^R \frac{\cos(r) + i\sin(r)}{r} dr$$
$$= 2i\int_\varepsilon^R \frac{\sin(r)}{r} dr$$

koska $\cos(r) = \cos(-r)$ ja $\sin(r) = -\sin(-r)$.

Kun $R \uparrow \infty$, $\varepsilon \downarrow 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(r)}{r} dr = \frac{\pi}{2}$$

Seuraa

$$\lim_{T \to \infty} U(Tx) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ kun } x > 0 \\ \frac{-}{\pi} 2 \text{ kun } x < 0 \end{cases}$$

Kun $T \to \infty$, $a < b$

$$\lim_{T \to \infty} 2\{U(T(x - a)) - U(T(x - b))\}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{kun } x > b \text{ tai } x < a \\ 2\pi & \text{kun } x \in (a, b) = 2\pi \\ \pi & \text{kun } x = a < b \text{ tai } x = b > a \end{cases}$$

Seuraa

$$
\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_R \left(\int_{-T}^{T} \left| \frac{\exp(it(x-a)) - \exp(it(x-b))}{it} dt \right) P_X(dx) \\
&= F(b-) - F(a) + \frac{1}{2}\{F(b) - F(b-)\} + \frac{1}{2}\{F(a) - F(a-)\} \\
&= \frac{1}{2}\{F(b) + F(b-)\} - \frac{1}{2}\{F(a) + F(a-)\}
\end{aligned}
$$

Olkoon $\int_{\mathbb{R}} |\varphi_X(t)| dt < \infty$, ja $F(b) = F(b-)$, $F(a) = F(a-)$. Silloin

$$
\lim_{b\to a} \frac{F(b) - F(a)}{b-a} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{exp(-ita) - exp(-itb)}{it(b-a)} dt
$$

ja dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa

$$
f_X(a) = \frac{dF_X}{dx}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-ita) \varphi_X(t) dt
$$

Analyyisin kielellä, karakteristinen funktio on tiheysfunktion Fourier muunnos, ja tiheysfunktio on karakteristisen funktion käänteis Fourier muunnos.