JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi 3, kesä 2012.
1. Harjoitusten malliratkaisut

1. (i) Lasketaan ensin $f'(x) = 3x^2 - 2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$ ja $f^{(n)}(x) \equiv 0$ kun $n \geq 4$. Tällöin $f(2) = 5$, $f'(2) = 10$, $f''(2) = 12$, $f'''(2) = 6$, joten

$$\begin{aligned} T_{1,2}f(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) = 5 + 10(x-2) \\ T_{2,2}f(x) &= 5 + 10(x-2) + 6(x-2)^2 \\ T_{3,2}f(x) &= 5 + 10(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3 = x^3 - 2x + 1. \end{aligned}$$

Lisäksi $T_{n,2}f(x) = T_{3,2}f(x)$ kaikilla $n \geq 4$ sillä $f^{(n)}(2) = 0$.

Kohta (ii) saadaan samaan tapaan

$$T_{2,1}f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = (x-1) + 3(x-1)^3.$$

2.

(i)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)}{|x-x_0|} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{|x-x_0|} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{|x-x_0|} = 0 + 0 = 0.$$

(ii)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)}{|x-x_0|^2} = \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{|x-x_0|}\right)\left(\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{|x-x_0|}\right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

(ii)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)f(x)}{|x-x_0|^2} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)} \cdot \frac{f(x)}{(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)} = 0.$$

3. Osoitetaan ensin, että $f(x_0) = 0$. Ensinnäkin f:n raja-arvoksi saadaan

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} |x-x_0| \overbrace{\left(\frac{f(x)}{|x-x_0|}\right)}^{\to 0} = 0.$$

Koska f on jatkuva niin $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Nyt f:n derivaatta x_0:ssa voidaan laskea

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \overbrace{f(x_0)}^{=0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x-x_0} = 0,$$

sillä oletuksen nojalla $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{|x-x_0|} = 0$.

4. Ratkaistaan tehtävä ”ovelalla laskulla”. (Kaavan voi myös johtaa induktiolla). Merkitään

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n.$$

Huomataan etta

$$-qS_n = -q - q^2 - \cdots - q^n - q^{n+1}.$$

Summaamalla nämä yhteen, niiden keskimmäiset termit syövät toisensa ja saadaan

$$S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}.$$

Kaava seuraa tästä sillä

$$(1-q)S_n = S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}.$$

5. Luennoilla laskettiin, $\sin x = x + o(|x|)$, ja

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(|x|^2).$$

Sijoittamalla $x \mapsto -x$ edelliseen saadaan

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(|x|^2).$$

Siispä

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{\sin^2 x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1 + x + \frac{x^2}{2} + 1 - x + \frac{x^2}{2}) - 1 + o(|x|^2)}{(x + o(|x|))^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(|x|^2)}{(x + o(|x|))^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(|x|^2)}{x^2}}{(1 + \frac{o(|x|)}{x})^2} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

6. Taylorilla saadaan

$$\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o(|x-1|^2)$$

ja

$$\cos(\pi x) = -1 + \frac{\pi^2}{2}(x-1)^2 + o(|x-1|^2)$$

joten

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{1 - x + \log x}{1 + \cos(\pi x)} &= \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{2}(x-1)^2 + o(|x-1|^2)}{\frac{\pi^2}{2}(x-1)^2 + o(|x-1|^2)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{2} + \frac{o(|x-1|^2)}{(x-1)^2}}{\frac{\pi^2}{2} + \frac{o(|x-1|^2)}{(x-1)^2}} \\ &= -\frac{1}{\pi^2}.\end{aligned}$$

7. Oletuksen nojalla

$$T_{n,x_0}f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n.$$

Toisaalta f:n Taylorin polynomi on

$$T_{n,x_0}f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

jolloin Taylorin polynomin yksikäsitteisyydestä (Lause 2.4) seuraa että kertoimien täytyy täsmätä; $f(x_0) = a_0$, $f'(x_0) = a_1$, $f''(x_0) = 2a_2 \ldots$ ja $f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n$.

(i) Olkoon $h = f'$. Tällöin $h(x_0) = f'(x_0) = a_1$, $h'(x_0) = f''(x_0) = 2a_2, \ldots h^{(n-1)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n$, joten

$$\begin{aligned}
&T_{n-1,x_0}f'(x)\\
&= T_{n-1,x_0}h(x)\\
&= h(x_0) + h'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}h''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}h^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^n\\
&= a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1}\\
&= (T_{n,x_0}f)'(x).
\end{aligned}$$

(ii) Nyt $g(x_0) = 0$, $g'(x_0) = f(x_0)$, $g''(x_0) = f'(x_0), \ldots, g^{(n+1)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
T_{n+1,x_0}g(x) &= a_0(x-x_0) + \frac{a_1}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}\\
&= \int_{x_0}^{x} T_{n,x_0}f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

8. Luennoilla laskettiin (Geometrisen sarjan summasta)

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

Kuna valitaan $t = -x^2$ saadaan

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}\\
&= 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + \cdots + (-x^2)^n + \overbrace{\frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}}^{\text{jäännöstermi}}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + o(|x|^{2n+1}).
\end{aligned}$$

Koska potenssisarjalla ei ole parittomia termejä niin kaikilla $n \geq 1$,

$$T_{2n+1,0}f(x) = T_{2n,0}f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}.$$

Koska $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ niin Tehtävän 6 (ii) nojalla

$$\begin{aligned} T_{2n+1,0}g(x) &= \int_{x_0}^{x} T_{2n,0}f(t)\,dt \\ &= \int_{x_0}^{x} 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n}\,dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

Koska potenssisarjalla ei ole parillisia termeja niin $T_{2n+2,0}g(x) = T_{2n+1,0}g(x)$.

9.

$$\begin{aligned} &\frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} \\ &= \frac{f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 - 2f(x_0) + o(h^2)}{h^2} \\ &= \frac{f''(x_0)h^2 + o(h^2)}{h^2} \\ &= f''(x_0) + \frac{o(h^2)}{h^2} \to f''(x_0) \quad \text{kun} \quad h \to 0. \end{aligned}$$