

**Analyysi 3, kesä 2012.**
Harjoitus 1 30.5.2012

1. Laske funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x + 1$
 - (i) n . Taylorin polynomi pisteessä $x_0 = 2$, $n = 1, 2, 3, \dots$
 - (ii) 2. Taylorin polynomi pisteessä $x_0 = 1$.
2. Olkoot $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktioita, joille pätee $f(x) = o(|x - x_0|)$ ja $g(x) = o(|x - x_0|)$ kun $x \rightarrow x_0$. Osoita, että
 - (i) $f(x) + g(x) = o(|x - x_0|)$,
 - (ii) $f(x)g(x) = o(|x - x_0|^2)$,
 - (ii) $(x - x_0)f(x) = o(|x - x_0|^2)$,kun $x \rightarrow x_0$.
3. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jolle $f(x) = o(|x - x_0|)$ kun $x \rightarrow x_0$. Osoita, että $f(x_0) = f'(x_0) = 0$.
4. Johda äärellisen Geometrisen sarjan summa (vaikkapa induktiolla tai suoraan ovelalla laskulla). Siis kun $q \neq 1$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin sarja

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

voidaan laskea kaavalla

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

5. Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{\sin^2 x}$$

käyttäen Taylorin lausetta. Muista hyperbolinen kosini, $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

6. Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 - x + \log x}{1 + \cos(\pi x)} \right)$$

käyttäen Taylorin lausetta.

7. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n kertaa jatkuvasti derivoituva funktio ja

$$T_{n,x_0}f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

Määritä

- (i) $T_{n-1,x_0}f'(x)$.
- (ii) $T_{n+1,x_0}g(x)$, missä $g(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$.

8. Laske funktioiden $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \arctan(x)$$

n . Taylorin polynomit pisteessä $x_0 = 0$. (Vihje: Sovella funktion $\frac{1}{1-t}$ potenssisarjaesitystä kun $t = -x^2$.)

9. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva funktio. Osoita Taylorin lausetta käyttäen, että

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

Oikealla oleva raja-arvo on ns. *Schwarzin toinen derivaatta*.

10. **Ylimääräinen Tehtävä.** Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva funktio, jolle

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{1/x} = e^3.$$

Laske $f(0)$, $f'(0)$ ja $f''(0)$.